SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

Q
54
N23
ser.4
v.23-25
1956-58

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXIII. — (Anno XCV)

gennaio - dicembre 1956

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1956

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXIII. — (Anno XCV)

gennaio - dicembre 1956

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1956

Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/accademia-delle-scienze-fisiche-e-matematiche-rendiconto_january-december-1956_23

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1955

letta nell' adunanza plenaria del dì 5 febbraio 1956

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Quando, per adempiere ad un dovere del suo ufficio, il segretario dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche si accinge, al principio di ciascun anno, a passare in rapida e scheletrica rassegna l' attività scientifica che la propria Classe ha esplicata nell' anno precedente, prova un sentimento di intima ed irrefrenabile soddisfazione nel constatare come la vitalità di questo vecchio e glorioso Sodalizio conservi tuttora inalterato e costante il proprio ritmo, pure in tempi, quali quelli attuali, in cui il moltiplicarsi di associazioni e di riviste scientifiche specializzate può far sembrare a taluno oramai sorpassata la funzione, pur sempre nobile ed alta, di questi antichi fari di cultura, che furono, nel Settecento e nell'Ottocento, le Accademie regionali italiane.

Vogliate, cari consoci, perdonare questo sentimento, che mi par quasi di intimo e legittimo orgoglio, che provo in questo momento, in cui mi accingo ad esporre brevemente, com' è mia consuetudine, i lavori compiuti dalla mia Accademia nell' anno testè decorso.

Iniziando la rassegna di quest' attività con i contributi riguardanti l' astronomia, devo segnalare due note. Una di esse, dovuta al dott. Riccardo BARBATELLI, espone le *Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti e pianetini,* riportando i risultati delle osservazioni, compiute durante il 1954, allo strumento dei passaggi di Bamberg, per i pianeti Marte, Giove, Saturno, Urano e Nettuno e per i pianetini Cerere e Vesta, seguitando così, con metodo e strumenti inalterati, la sistematica ricerca iniziata negli anni precedenti. L' altra nota, del dott. Elio FICHERA, riferisce sulle *Determinazioni di ascensione retta del pianeta Saturno,* eseguite ugualmente presso il nostro Osservatorio Astronomico di Capodimonte durante l' anno 1955. Questa serie di osservazioni, compiuta con la massima cura e precisione, per assicurare ai risultati un alto grado di attendibilità, appare di grande aiuto per la migliore conoscenza dei cataloghi stellari fondamentali.

Numerose note sono da segnalare nel campo della geometria, di cui ben sei sono dovute alla infaticabile attività del nostro presidente SPAMPINATO, il quale nella prima di esse ha studiato l' *Inviluppo e congruenza delle tangenti ai rami di una falda bidimensionale piana o tridimensionale dell'* S_3, mentre nella seconda, trattando dell' algebra dei numeri tripotenziali, ha riferito *Sulle condizioni di razionalità per una superficie tripotenziale,* determinando le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie unirazionale tripotenziale risulti razionale, e nella terza ha esaminato il *Prolungamento di una ipersuperficie dell'* S_r *complesso nel campo quadripotenziale.*

Le altre tre note sono rispettivamente dedicate alla definizione del *Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa,* allo studio de *Le falde tridimensionali dell'* S_5 *determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa,* e alla *Rappresentazione in* S_5 *del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali.*

Un altro lavoro, spettante al dott. Angelo FADINI, studia *Le superficie iperellittiche dell'* S_3 *triduale e la loro rappresentazione complessa,* mentre una nota del prof. Rodolfo PERMUTTI, *Su una rappresentazione delle* g^n_1 *di una retta,* tratta della possibilità di rappresentare le g^n_1 di una retta, riguardate come corrispondenze simmetriche di indice n — 1, mediante curve di un piano, immagine delle coppie non ordinate di punti della retta stessa.

Sempre nel settore delle matematiche pure, tre lavori riguardano problemi di analisi. Uno di essi, del socio corrispondente Guido STAMPACCHIA, espone alcune *Osservazioni sull' esistenza e sull' unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico;* un altro, del dott. Emilio GAGLIARDO, stabilisce *Teoremi di unicità per le soluzioni di un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine*; ed il terzo, del dott. Carlo CILIBERTO, apporta un interessante complemento ad alcune sue precedenti osservazioni *Sul problema di Darboux* per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico.

Passando ora alle indagini di Scienza delle costruzioni, devo ricordare non meno di sette note, dovute al compianto collega Adriano GALLI ed ai suoi collaboratori ed allievi. Il nostro consocio, improvvisamente ghermito dalla morte in queste ultime settimane, ha esposto in una nota, dal titolo *Ancora in margine alla indipendenza dei principii di reciprocità,* un artificio che permette di pervenire al secondo principio di reciprocità per via elementare, senza bisogno di sconnettere la struttura.

Due lavori del prof. Vincenzo FRANCIOSI riguardano, rispettivamente, alcune *Premesse all' introduzione del calcolo a rottura nella pratica tec-*

nica e *Il teorema delle trasformazioni lineari dei cavi di precompressione nel calcolo a rottura.* Nel primo di essi si fornisce la dimostrazione dei teoremi di Grenberg e Feinberg generalizzati, nell' ipotesi di coesistenza di caratteristiche dello sforzo di tipo diverso, di carico non proporzionale, e di dominio di snervamento di forma qualsiasi, purchè convesso. Nel secondo si estende alla fase di rottura il teorema di Guyon sulle trasformazioni lineari dei cavi di precompressione, dimostrando, con riferimento ad una trave continua, che, variando le eccentricità del cavo risultante di precompressione di quantità rappresentate da una spezzata rettilinea avente ordinate nulle in corrispondenza degli estremi, e le cuspidi in corrispondenza delle verticali per gli appoggi intermedi, restano inalterati sia il coefficiente di sicurezza a rottura che l'ubicazione delle cerniere di snervamento. Due note dovute al prof. Eugenio Bruzzese trattano, poi, de *L'instabilità dell'equilibrio della trave Nielsen al di là del limite di proporzionalità* e del *Calcolo a rottura di strutture in conglomerato precompresso, per flessione e sforzo assiale coesistenti.* Con le prime ricerche si dimostra che il moltipli catore critico dei carichi agenti su di una trave Nielsen, calcolato tenendo conto dell'effettivo legame tra modulo di elasticità e sollecitazione unitaria, non garentisce le elevate riserve nei confronti della instabilità che si deducono determinando il moltiplicatore stesso in regime elastico. Con le seconde indagini si fornisce la relazione che lega momento flettente e sforzo normale in condizioni di plasticizzazione totale, con riferimento ad una sezione rettangolare in conglomerato precompresso. Uno studio del dott. Tullio Renzulli espone i *Diagrammi delle massime sollecitazioni nei ponti ad arco sottile e trave irrigidente*, ricercando le linee d' influenza della spinta del momento flettente e dello sforzo di taglio per forze verticali viaggianti nonchè i diagrammi delle massime sollecitazioni per carico uniforme. Ed infine una nota dell' ing. Pasquale D' Elia porta un *Contributo alla determinazione del carico critico della trave a cassone* soggetto a carico uniforme lungo uno spigolo, tenendo conto della presenza, lungo gli spigoli, di nodo incastro.

Per quanto si riferisce alle indagini di fisica, è da segnalare una nota della dott. Anna Cibelli, *Misure in alta frequenza della conducibilità di elettroliti forti e deboli*, nella quale si studia il particolare comportamento di alcuni sali monovalenti e bivalenti per misure di conducibilità, rilevando che esistono deviazioni dalla legge di Debye dipendenti dalla presenza di un raggio jonico, il quale fa sentire maggiormente la sua azione in alta frequenza, anzichè nelle frequenze basse.

Nel campo meteorologico particolari considerazioni *Sulla variabilità ed instabilità del regime pluviometrico annuale nel Napoletano* ha esposte, in una nota, il dott. Cristofaro Mennella, il quale, studiando la serie pluviometrica dell' Osservatorio Astronomico di Capodimonte, che ha ormai

raggiunto l' estensione di ben 130 anni, dal 1821 al 1951, ha potuto precisare come gli andamenti annuali medi ritenuti normali nella regione napoletana differiscano sensibilmente tra un periodo pluridecennale e l'altro e come non poche conclusioni finora desunte, su detto regime, dall'esame di periodi consimili debbano essere notevolmente modificate.

A ricerhe chimiche si riferiscono due lavori. Uno, della prof. Silvia Restaino, dà notizia dei risultati delle indagini analitiche eseguite su alcuni prodotti dell' attività del Somma-Vesuvio (minerali leucitici, pirossenici, olivinici e materiali piroclastici dell'eruzione 1944); l' altro, del prof. Riccardo Sersale e della dott. Liliana Calarese, *Sull' habitus cristallino dei solidi che prendono origine nella reazione fra l' allumina e la soluzione di calce*, espone i risultati conseguiti cimentando allumine, ottenute in modo differente, verso la soluzione satura di calce. Si rileva, in questa nota, che, a sèguito dell' attacco, prendono origine delle soluzioni instabili da cui, a temperatura ordinaria, si separano cristalli di abito esagonale, che a loro volta si evolvono verso la.forma cubica, stabile; e si espongono le influenze che su tale evoluzione esercitano l' alto titolo di calce della soluzione di contatto, la temperatura, l' aggiunta di alcali e la presenza di sostanze tensioattive.

Si giunge così al settore delle discipline petrografiche, geologiche e paleontologiche, nel quale sono pure da ricordare contributi molteplici. Una nota del socio Antonio Scherillo, che rappresenta la continuazione di precedenti ricerche di *Petrografia chimica dei tufi flegrei*, esamina, col corredo di numerose analisi chimiche, la potente formazionc di pozzolane della zona napoletana compresa fra Miano, i Ponti Rossi, Capodichino, Poggioreale e Pesole d'Arpino, la quale mostra, in alcune cave, il graduale passaggio di quei prodotti piroclastici incoerenti, attraverso il cosiddetto «mappamonte», fino al tufo giallo, per effetto di autometamorfismo. Un lavoro del dott. Renato Sinno è dedicato allo *Studio geologico e petrografico della zona Monte Olibano-Pozzuoli*, zona che nei Campi Flegrei presenta un interesse particolarissimo. non solo perchè è sede delle più vistose manifestazioni della residua attività vulcanica attuale, ma anche perchè presenta le maggiori effusioni laviche a noi note nella regione flegrea. La nota comprende due parti distinte, nella prima delle quali si studia il tufo giallo che tra Bagnoli e Pozzuoli costituisce la formazione di base, mentre nella seconda si esaminano le cupole trachitiche di Monte Olibano. La posizione stratigrafica fa collocare queste trachiti nel «terzo periodo antico» flegreo, dopo Agnano e prima della Solfatara. Sopra *Il significato paleoclimatico e l' età della « crosta calcarea » nell' area del foglio 175 (Cerignola)* della Carta d' Italia 1:100.000, ha discusso il dott. Vincenzo Minieri in altro lavoro, concludendo che quel particolare deposito evaporitico calcareo-siliceo della regione pugliese, analogo alla crosta calcarea presente nell' Africa settentrionale, deve essere messo in relazione col particolare regime cli-

matico arido e secco, di tipo tropicale o sub-tropicale, che interessò la Puglia durante il Tirreniano. Le soluzioni calcareo-silicee che permeavano i conglomerati poligenici del Calabriano dovettero, nel Tirreniano, risalire in superficie per l' aspirazione capillare dell' acqua soggetta ad attiva evaporazione ad una temperatura media superiore ai 20°, e depositarvi una spessa coltre di incrostazioni.

A particolari indagini paleontologiche nel campo dei mammiferi si riferisce anzitutto una memoria del socio Geremia D' Erasmo e della dott. Maria Moncharmont Zei sopra *Il cranio giovanile di Elephas antiquus italicus di Pignataro Interamna nella valle del Liri.* In questo lavoro, corredato di molteplici figure intercalate e di tavole illustrative fuori testo, viene descritto il cranio elefantino scoperto nel 1949 nel noto giacimento pleistocenico della valle del Liri, e successivamente preparato, restaurato e montato nel Museo geo-paleontologico di Napoli. Dallo studio osteologico particolareggiato di tale avanzo e dai necessari confronti istituiti con gli altri esemplari fossili conosciuti di quella razza e con i rappresentanti delle due specie attualmente viventi in India e in Africa è chiaramente risultato come il cranio giovanile di Pignataro illustrato dai due autori, che è il meglio conservato fra quelli finora descritti, presenti i suoi maggiori legami di affinità con l' elefante indiano, anzichè con l' africano. Di una mandibola di Ippopotamo scoperta nel giacimento quaternario di Trentangioli, nella valle di Venosa, tratta una nota del dott. Giovanni De Biase (*Sopra un avanzo fossile di ippopotamo rinvenuto nella valle di Venosa),* il quale per i particolari osteologici e per le dimensioni del reperto fossile è indotto a concludere che richiami gli analoghi resti trovati nel Valdarno e debba quindi riferirsi, al pari di essi, alla razza *major* dell' *Hippopotamus amphibius.* E *Sul rinvenimento di un frammento mandibolare umano in grotta Romanelli, presso Castro (Lecce)* il prof. Antonio Lazzari ha esposto alcune considerazioni, le quali appaiono particolarmente interessanti, data l' estrema rarità di reperti umani in quella grotta, che ha invece fornito sì larga copia di avanzi di vertebrati quaternari e di industria paleolitica.

Avrei così completata la mia rapida rassegna delle pubblicazioni accademiche dell' anno 1955, se non dovessi ancora ricordare due altri lavori che, come i precedenti, sono stati inseriti nel nostro Rendiconto. Uno si riferisce alla consueta *Relazione* annuale del vostro Segretario, letta nella tornata plenaria del 30 gennaio dell' anno scorso; mentre l' altro è una lucida ed esauriente esposizione o, meglio, un disegno storico-critico della evoluzione de *La biologia vegetale del nostro tempo,* che il consocio Giuseppe Catalano ha voluto presentare, ricordando Federico Delpino nel cinquantesimo anniversario della morte e dimostrando come, pur con gli imponenti progressi scientifici e tecnici realizzati dall'umanità nel ventesimo secolo, sia rimasto sempre vivo ed attuale negli studiosi il bisogno di

interpretare i fenomeni della natura vivente sulla stessa base finalistica tratteggiata dal Delpino quando creò la sua biologia vegetale.

Complessivamente, perciò, il vol. XXII della 4ª serie del Rendiconto ha ospitato trenta lavori riguardanti le più svariate branche delle scienze matematiche, fisico-chimiche e naturali, oltre alla consueta relazione annuale ed ai processi verbali delle adunanze, raggiungendo 48 fogli di stampa, con più di una sessantina di figure intercalate e con 23 tavole fuori testo. Dobbiamo essere grati alla speciale Commissione istituita presso la Presidenza del Consiglio, che, riconoscendo l' alto valore culturale del nostro periodico, non ci ha fatto mancare, neppure quest' anno, un contributo finanziario per la stampa di esso, sui fondi che l' Ente per la Cellulosa e la Carta riserva alle riviste di maggiore importanza nazionale.

Ma queste non sono le sole manifestazioni di attività dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche durante il 1955 : chè, come sempre, la nostra Classe ha partecipato regolarmente, con propri messaggi o delegati o pareri, a numerose manifestazioni culturali. Ricordo, fra l' altro, il Centenario della fondazione della Société Royale Éntomologique de Belgique, il Convegno della Società di Genetica agraria e dell' Unione Zoologica Italiana, le Onoranze al prof. Mario Picone in occasione del suo collocamento fuori ruolo per limiti di età, le proposte per i premi Antonio Feltrinelli banditi dall' Accademia dei Lincei, ecc. E rinnovo i sentimenti del più vivo compiacimeuto dei consoci tutti per l'alta e ben meritata distinzione che nel concorso ai due Premi Urania del Comune di Napoli — destinati per il 1955 alle scienze chimiche ed alle scienze biologiche, e per i quali anche la nostra Accademia fu chiamata a dare una propria designazione — toccò ai cari colleghi proff. Giovanni Malquori ed Umberto Pierantoni.

Come negli anni precedenti, si è continuato a ripristinare e ad accrescere i cambi delle pubblicazioni accademiche con altre associazioni ed istituti culturali (Stazione sperimentale *De aula Dei* di Saragoza, Accademia delle Scienze di Leningrado, Dipartimento di Matematica della Scuola politecnica di S. Carlo in Brasile, Agra University dell' India, Società dei Matematici e Fisici della Serbia, Seminario di Matematica dell' Università di Bari, ecc.) e si è provveduto alle nomine previste dallo Statuto. E' stato eletto vice-presidente per il 1956 il collega Carlo Miranda ed è stato riconfermato segretario per il triennio 1956-1958 il socio Geremia D'Erasmo.

Nel corso del 1955 non abbiamo dovuto lamentare alcuna perdita nella compagine dei nostri consoci; ma nei primi mesi di esso ci è stata comunicata, con ritardo, la dolorosa scomparsa — avvenuta già durante il 1954 — del socio straniero Ignacio Manuel Azevedo do Amaral, professore di geometria analitica e calcolo infinitesimale nella scuola politecnica di Rio de Janeiro, appartenente dal 27 settembre 1940 alla nostra Sezione di Scienze matematiche. Mentre mandiano il doveroso omaggio del nostro mesto ricordo alla memoria dell' illustre scienziato scomparso, ci si stringe

il cuore all'amara constatazione che il nuovo anno ci ha già fatto lamentare, nel breve giro di poche settimane, perdite gravissime; chè, oltre al presidente generale della nostra Società, prof. Emanuele Ciafardini, il quale, pur non appartenendo alla nostra Classe, era da tutti apprezzato ed amato quale uomo di profonda dottrina e di immensa bontà, ha strappato al nostro affetto — nel pieno rigoglio di una multiforme vita attivissima, tutta dedicata alla scienza, alla tecnica, alla scuola, all' Ateneo e alla città di Napoli — il carissimo collega Adriano Galli. Una meno indegna menzione degli amici immaturamente scomparsi sarà senza dubbio fatta allorchè sarà giunto il tempo di ricordarvi la vita delle nostre Accademie durante l' anno 1956; ma il nome di questi consoci è sgorgato fin da ora spontaneo, perchè troppo recente è il dolore per la loro dipartita. Essi sarebbero stati oggi accanto a noi, come solevano da tanti anni, in questa riunione annuale. Vogliate scusare questo irrefrenabile bisogno del mio cuore e unirvi a me nel mandare alla loro cara, inobliabile memoria, l' ultimo tributo del nostro vivo ed affettuoso rimpianto.

Carattere singolare e cuspidale di una curva storta completa.

Nota del Socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 7 gennaio 1956)

Sunto - In tre note precedenti [1], attraverso la rappresentazione di una curva algebrica piana completa con una V_3 di S_5 costituita da ∞^1 piani generatori, sono stati introdotti due invarianti proiettivi della curva: il carattere singolare ed in carattere cuspidale. Con questa nota si iniziano analoghe ricerche nei riguardi di una curva algebrica storta, che viene rappresentata con una V_3 di S_7, anch'essa costituita da ∞^1 piani generatori, e mediante la quale s'introducono anche per la curva storta il carattere singolare e cuspidale. Tali piani generatori della V_3 sono determinati, anche in questo caso, dagli ∞^1 E_1 della curva.

Si studia pure: la V_4 di S_7 determinata dagli ∞^1 E_2 della curva c^n storta, e la V_5 di S_7 determinata dalla superficie sviluppabile osculatrice della c^n.

Come le tre note citate si ricollegano alla rappresentazione complessa del S_2 biduale in una congruenza H_4 di rette dell'S_5, così questa nota si ricollega con la rappresentazione dell'S_3 biduale con una congruenza di rette H_6 dell'S_7 che qui viene introdotta sinteticamente (N° 1) per rendere il lavoro indipendente dalla teoria dell'Algebra dei numeri biduali]. A tal riguardo, pertanto, questo lavoro fa seguito ad un altro citato nella nota del n° 3

1. Introduzione sintetica della congruenza di rette di S_7 I^a rappresentazione complessa dell'S_3 biduale.

Consideriamo l'S_7 proiettivo complesso congiungente i due spazi S_3 ed S'_3. In ogni S_1 della stella di vertice S'_3, congiungente S'_3 con un punto P di S_3, si consideri la stella di rette avente per vertice il punto P' di S'_3 corrispondente del punto P di S_3 in una prefissata proiettività ω fra S_3 ed S'_3. Si avranno così ∞^3 stelle di rette negli ∞^6 S_4 considerati. Le ∞_6 rette S_7 così ottenute costituiscono una congruenza [che estende la congruenza dell'S_5] dalla quale, escludendo le rette di ciascuna stella appartenenti ad S'_3, si ottiene la congruenza che dà la prima rappresentazione dell'S_3 biduale. Per un punto R di S_7 passa una sola retta di H_6: la retta $g = RP'$, essendo P' il punto corrispondente, per la pro-

[1] N. Spampinato. – a) *Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa.* b) *Le falde tridimensionali dell'S_5 determinati dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa.* c) *Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali.* Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Serie 4 — Vol. XXII — 1955.

ettività ω fra S_3 ed S'_3, del punto P in cui l'S_3 è secato dall'$S_4 = S'_3R$. Anche qui i punti singolari per la congruenza H_6 sono i punti dell'S'_3.

2. Rappresentazione degli ∞^5 E_1 dell'S_3 complesso, nell'$S_7 = S_3S'_3$.

Nell'S_3 fissiamo un E_1 di origine P ed appartenente ad una fissata retta t della stella di centro P. Diciamo P′ e t' il punto e retta dell'S'_3 corrispondenti di P e t per la proiettività ω. Nell'$S_4 = S'_3P$ resta determinata la stella di rette di centro P′, facente parte della congruenza H_6. Dentro tale $S_4 = S'_3P$ consideriamo la retta $g = PP'$ e la stella di ∞^2 piani avente per asse la retta PP′. Tale stella di piani seca in S'_3 la stella di rette di centro P′. Fa parte di questa stella la retta t' omologa di t per la proiettività ω. Il piano congiungente P con t', di tale stella di piani, si dirà corrispondente dell'E_1, di centro P e tangente t, fissato in S_3. Agli ∞^2 E_1 di S_3 avente lo stesso centro P, corrisponderanno gli ∞^2 piani della stella di asse PP′ nell'$S_4 = S'_3P$. Ne segue una corrispondenza fra gli ∞^5 E_1 di S_3 e gli ∞^5 piani delle ∞^3 *stelle di piani* di un primo sistema che si vengono a fissare negli ∞^3 S_4 della stella di S_7 di centro S'_3. Tali ∞^5 piani costituiscono in S_7 una congruenza H_5 di ordine 1, perchè per un generico punto R di S_7 passa un solo S_4 della stella di vertice S'_3, ed un determinato piano della stella di piani della congruenza avente per ambiente detto S_4. Si noti che nel caso generico il punto R non apparterrà alla retta $g = PP'$ asse di detta stella di piani di S_4, i cui punti risultano singolari per la congruenza.

Questa congruenza H_5 di piani di S_7 estende quella di S_5 considerata nel n° 18 del terzo dei lavori citati in (1) e che abbiamo indicato con H_3. Essa è costituita da ∞^3 stelle ciascuna di ∞^2 piani, e che diremo *stelle generatrici* di H_5. Gli S_4 ambienti di dette stella sono quelle di centro S'_3. [Le stelle generatrici estendono i fasci generatori della H_4 di S_5]. Gli ∞^3 assi di tali stelle sono le generatrici della W_4 rigata costituita dalle rette congiungenti le coppie di punti (P, P′) di S_3 ed S'_3 corrispondenti nella w. La varietà W_4 costituisce la *varietà singolare* di H_5.

Nella H_5 di S_5, oltre ai fasci del primo sistema sono stati messi in evidenza anche i fasci del secondo sistema. Nel caso attuale per la H_5 di S_7, altre alle ∞^3 *stelle*, si hanno ∞^4 *fasci* aventi per assi le ∞^4 rette di S'_3 e per spazi ambienti gl S_3 congiungenti le ∞^4 coppie di rette (t, t') corrispondentisi nella proiettività ω. Gli E_1 rispondenti ai piani di un tale fascio generatore della H_5 sono gli E_1 della retta t di S_5. Raccogliendo si ha:

I) *Le ∞^1 rette della congruenza H_6 di S_7 sono distribuite in ∞^5 fasci di rette i cui piani sostegno costituiscono una congruenza H_5 di ordine 1, in corrispondenza biunivoca senza eccezioni, con gli ∞^5 E_1 dell'S_3.*

Gli ∞^5 *piani di* H_5 *sono distribuiti in* ∞^3 *stelle* (*generatrici*), *aventi per assi le* ∞^3 *rette* $g = PP'$ *della varietà singolare* W_4. *Tali stelle generatrici rispondono alle stelle di* E_1 *di* S_3, *ciascuno dei quali ha uno stesso centro* P. *Gli* S_4 *ambienti di tali stelle generatrici di piani sono gli* S_4 *della stella di vertice* S'_3.

I piani di H_5 *si distribuiscono anche in* ∞^4 *fasci* (*direttori*) *con gli assi nelle* ∞^4 *rette dell'* S'_3.

Anche qui si ha la proprietà: [analoga alla III del n° 18 del terzo dei lavori citati in (1)]

II) *Un piano di* H_5 *appartiene ad un determinato fascio direttore a ad una determinata stella generatrice.*

3. Rappresentazione in S_7 degli ∞^1 E_1 di una curva dell'S_3.

Nel n° 3 della nota (1) a) abbiamo visto come sono rappresentati in S_5 gli ∞^1 E_1 di una curva piana con una V_3^{η} costituita da ∞^1 piani di S_5, e con η eguale alla somma dell'ordine n e della classe m della curva. Facciamo vedere che una analoga rappresentazione si ha, in S_7, per gli E_1 di una curva dell'S_3.

Sia data in S_3 una curva algebrica c di ordine n e classe m, sarà perciò n il numero dei punti comuni a c e ad un generico piano di S_3, ed m l'ordine della *superficie rigata* sviluppabile costituita dalle ∞^1 rette tangenti a c, ovvero *il numero delle tangenti a* c *che si appoggiano ad una generica retta di* S_3.

Si noti esplicitamente che nel caso particolare che la curva c appartenga ad un piano di S_3, le sue ∞^1 rette tangenti a c costituiscono lo stesso piano di c, da contarsi tante volte quante sono le tangenti a c uscenti da un generico punto del piano, cioè quant'è la classe di c. Sicchè quando è c una curva piana (dell'S_3), la rigata delle sue tangenti si spezza nel piano di c contata m volte se è m la classe di c, come curva piana. Per tale osservazione preferiamo seguitare ad indicare con m la classe di c anche quanto si tratta di una curva storta. Ora nel caso che c sia una curva piana la V_3 che rappresenta i suoi E_1, in S_5, è di ordine $\eta = n+m$. Facciamo vedere che la stessa proprietà vale anche quando la c è una curva storta, cioè dimostriamo che:

I) *Gli* ∞^1 E_1 *di una curva algebrica* c^n *dell'*S_3 *di ordine* n *è classe* m *sono rappresentati da* ∞^1 *piani* [*della congruenza* H_5 *di* S_7] *costituenti una* $V_3^{\eta'}$ *di ordine* $\eta' = n + m$.

Infatti se (P, t) è una coppia punto retta-appartenentisi rappresentante un E_1 di c, cioè con P in c e t tangente a c in P, il piano di H_5 imma-

gine di detto E_1 è il piano $\pi = Pt'$, con t' retta di S'_3 omologa di t nella proiettività w. Variando P in c, il punto P' descriverà in S'_3 la curva c' omologa di c nella w. La retta t' descriverà, pertanto, la rigata delle tangenti a c', rigata che farà di ordine m, essendo m la classe di c' (eguale alla classe di c). Ciò premesso sechiamo la $V_3^{\eta'}$ descritta dal piano Pt' al variare di P in c, con un S_6 di S_7 passante per S'_3. La $V_2^{\eta'}$ sezione si spezzerà nella superficie rigata di ordine m contenuta in S'_3, descritta dalla tangente t' a c', e negli n piani di $V_3^{\eta'}$ uscenti dagli n punti di c in cui c è secata dall' S_6, [o ciò che è lo stesso, dal piano, di S_3, che l' S_3 seca in S_3]. Sicchè la $V_3^{\eta'}$ è di ordine $\eta' = n + m$.

NOTA. La V_3 di S_7 rispondente alla curva intersezione di due superficie di S_3 è già stata considerata nel n° 5 della nota « *Rappresentazioni complesse di superficie biduali prolungamento di superficie complesse* » (Ricerche di matematica, Vol. IV, 1955) Napoli Istituto di Matematica dell' Università).

Si noti pure che l' insieme dei piani della congruenza H_5, e l'insieme delle ∞^3 rette della W_4 sono stati già notati nel n° 7 di tale nota, unitamente ad un altro insieme di ∞^5 spazi, rispondenti alle coppie punto-piano appartenentisi di S_3. Nel n° seguente vedremo come resta determinato in tale insieme spazi un sistema ∞^1 dalla curva c fissata in S_3.

4. La V_4 di S_7 determinata dagli ∞^1 E_2 dalla curva c^m di S_3, e sue relazioni con $V_3^{\eta'_4}$

Due generatrici infinitamente vicine della V_2^m rigata sviluppabile, costituita dalle ∞^1 tangenti alla curva storta c sono congiunti da un piano tangente alla rigata. Se diciamo a e b tali tangenti nei due punti A e B di c, infinitamenle vicini, e quindi (supposto B appartenente alla tangente a in A), detto C il punto di b infinitamente vicino a B, il piano ABC, determinato nel caso generico dai tre punti *non allineati* A, B e C, infinitamente vicini, si può considerare *determinato dall'* E_2 *di* c *costituito da tali tre punti, infinitamente vicini.*

Nell' S_3 consideriamo il piano A' B' C' corrispondente del piano ABC nella proiettività w. L' S_3 = AA'B'C' di S_7 può considerarsi, pertanto, determinato dall' E_2 sudetto di c, e si ottiene congiungendo il punto A di c con il piano A'B'C', *osculatore* a c' nel punto A' omologo per la w del piano A B C *osculatore* a c nel punto A, e tangente alla rigata V_2^m nel punto A. Tale S_3 AA'B'C', al variare di A in c, e quindi dell' E_2 = ABC fra gli ∞^1 E_2 di c, varia in una V_4 di S_7, determinata in S_7 dalla data curva c.

A) *Se* c *è una curva piana,* il piano di S_3 che la contiene viene sempre a coincidere con il piano ABC che sarà fisso. Conseguentemente

sarà fisso il piano A'B'C' e l' S_3 sudetto generatore della V_4 descriverà l' S_2-cono avente per vertice tale piano di S'_3 e secante in S_3 la curva c data. *In questo caso particolare la* V_4 *è pertanto, un* S_2*-cono di ordine* n. *dell'* S_5 *congiungente il piano di* c *con il piano di* c'.

B) Supponiamo ora che c non sia piana, ma storta. Per trovare l'ordine della V_4 in questo caso osserviamo intanto che gli ∞^1 spazi generatori della V_4 secano in S'_3 gli ∞^1 piani oscultori alla c' e questi piani riempiono l' S_3 che farà, pertanto, parte della V_4 con una multiplicità m' eguale al rango di c' cioè al numero m' dei piani osculatori a c' passanti per un generico punto P' di S_3, che è dato dalle *classe* m' della superficie sviluppabile osculatrice, ovvero dal numero dei piani tangenti di questa superficie passanti per P'. L' intero m' lo chiameremo anche *seconda classe* della curva gobba data c (e così della c' proiettiva a c. [E' già definito come *classe* di c l'ordine m di detta superficie sviluppabile osculatrice].

Sechiamo ora la V_4 con un iperpiano S_6 passante per S'_3. La V_3 sezione si spezzerà nell' S'_3 contato m' volte, e in n S_3 generatori: quelli uscenti dagli n punti in cui la c è secata dall' S_6. La V_4 è, pertanto, di ordine $n + m'$. Dunque:

La V_4 *costituita dagli* ∞^1 S_3 *rispondenti agli* ∞^1 E_2 *della curva storta* c *di* S_3, *è di ordine* n + m' *essendo* n *l'ordine ed* m' *la seconda classe di* c (cioè la classe m' della superficie sviluppabile osculatrice di c.)

5. La V_5 di S_7 determinata dalla superficie sviluppabile osculatrice della curva c'' di S_8.

La V_4, di ordine $n + m'$ determinata dalla curva storta c, considerata nel n° precedente, quale insieme dei suoi ∞^1 E_2, contiene, quale varietà subordinata, la $V_3^{\eta'}$, di ordine $\eta' = n + m$, determinata dalla c considerata come insieme dei suoi ∞^1 E_1. In entrambi i casi interviene la superficie V_2^m [osculatrice sviluppabile della c] *o col suo ordine* m (*classe di* c) *o con la sua classe* m' (*seconda classe* di c).

E' bene ora notare che detta V_4 è, a sua volta, una varietà subordinata della V_5, di ordine m^2 che la V_2^m determina in S_7, costituita dagli ∞^2 $S_3 = P\pi'$ con P variabile sulla V_2^m e π' piano omologo nella w del piano π tangente alla V_2^m in P. [Si veda in proposito il n° 1 della nota citata nel n° 8). Invero quando il punto P si fà variare, anzichè in tutta la superficie V_2^m, sulla curva c, l' $S_3 = P\pi'$ descrive la $V_4^{n',m'}$ del n° precedente. Si ha perciò:

La $V_4^{n',m'}$ *determinata alla curva storta* c'' *come insieme dei suoi* ∞^1 E_2, *è subordinata alla* $V_5^{m^2}$ *determinata in* S_7 *dalla superficie* V_2^m, *di ordine* m *e classe* m', *sviluppabile osculatrice di* c''. *La* $V_3^{n',m}$ *deter-*

minata da c^n *come insieme dei suoi* ∞^1 E_1 *è, a sua volta, subordinata dalla* $V_4^{n+m'}$.

6. Rappresentazione delle ∞^2 coppie di E_1 di una curva c^n dell' S_3.

Data in S_3 una curva storta c^n, i due piani di H_5 rispondenti ad una coppia di E_1 di c, nel caso generico, non hanno alcun punto in comune: essi sono, pertanto, congiunti da una S_5, passante per S'_3 che congiunge le due rette di appoggio in S'_3 di detti due piani. La retta che detto S_5 seca in S_3 sarà la corda AB di c congiungente i centri A e B dei due E_1. Viceversa congiungendo la retta AB con S'_3 si ottiene l' S_5 congiungente i due piani Aa' e Bb' che rappresentano i due E_1 di c di centri A e B. *Si viene così a fissare una corrispondenza fra gli* ∞^2 S_5 *di* S_7 *proiettanti* da S'_3 *le* ∞^2 *corde* AB *di* c *e le* ∞^2 *coppie di* E_1 *di* c. Tali ∞^2 S_5 riempiono l' S_7, costituendo una congruenza K, avente come singolari i punti di S'_3. Se R è un punto di S_7 fuori di S'_3, detto P il punto di S_3 proiezione di R da S'_3, per R passano tanti S_5 di detta congruenza quanti sono le rette di S_3 passanti per P che siano corde di c, cioè il loro numero è dato dall' *ordine della congrueuza delle corde di* c, ovvero dal *numero dei punti doppi appartenenti di* c. Si ha perciò:

Le ∞^2 *coppie di* E_1 *della curva storta* c *di* S_3 *sono in corrispondenza con gli* ∞^2 S_5 *una congruenza* K *dell'* S_7, *il cui ordine è dato dal numero dei punti doppi appartenenti di* c.

7. Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva storta completa.

La coppia di E_1 di c^n, (Aa) e (Bb), rappresentata dalla coppia di piani Aa' e Bb' (con a', b' rette omologhe di a e b nella proiettività ω fra S_3 ed S'_3) per quanto è detto nel n° precedente, è rappresentata dall' S_5, della congruenza K_2, congiungente Aa' con Bb', piani che, nel caso generico risultano indipendenti. Ma tali due piani risultano congiunti da un S_4 se le due rette a e b sono complanari e fra le ∞^2 coppie di E_1 di c^n, se è $n > 4$ ve ne sono ∞^1 che presentano tale particolarità, perchè ogni generatrice della sviluppabile delle tangenti a c^n incontra altre $n - 4$ generatrici, non infinitamente vicine ad essa. Se a e b è una tale coppia di tangenti a c^n, e diciamo P il loro punto d' intersezione, i due piani della V_3^{n+m} Aa' e Bb', rispondenti ai due E_1 di c^n di centri A e B, sono congiunti dall' S_4 determinato dai punti A e B di S_3 e dal piano di S'_3 a cui appartengono le rette a' e b', omologhe di a e b nella proiettività (8). Il punto P comune ad a e b, sarà un punto della *curva doppia nodale della superficie sviluppabile,* perchè per esso passano le due generatrici a e b della sviluppabile non infinitamente vicine. Il piano congiungente a e b

risulta tangente a c^n sia in A, sia in B, cioè è bitangente a c^n. Si ha perciò:

I) *In corrispondenza agli* ∞^1 *piani bitangenti a* c^n *si hanno* ∞^1 *coppie di* E_1 *di* c^n *a ciascuna delle quali corrisponde una coppia di piani, della* V_3^{n+m}, *congiunti da un* S_4.

Può accadere, *in particolare*, che sia

1) $a = b$ (con $A \neq B$)
2) $A = B$ (con $a \neq b$)

Nel caso 1) la retta a *è bitangente a* c^n *nei due punti distinti* A *e* B (Questi due punti possono essere, in particolare infinitamente vicini, nel qual caso a sarà una *tangente di flesso* per c^n).

Nel caso 2) avendo la c^n in A due tangenti distinte a e b, *sarà* A *punto multiplo di* c^n [almeno doppio e tale punto doppio sarà cuspidale se a e b risultano infinitamente vicine].

Nei casi 1) e 2) e solo in tali casi i piani distinti Aa' Bb' *risultano conspaziali.* In analogia a due definizioni introdotte per una curva piana completa, diciamo *carattere singolare* della curva *storta* completa il numero delle coppie di piani della V_3^{n+m} che essa determina in S_7 che risultano conspaziali. Si ha allora che:

II) *Il carattere singolare della curva storta* c^n *completa è eguale alla somma del numero dei punti doppi (a tangenti distinte o infinitamente vicine) e delle tangenti doppie (a punti di contatto distinti o infinitamente vicini) della* c^n.

Diciamo *carattere cuspidale* della curva storta completa c^n il numero delle coppie di piani della V_3^{n+m} che risultano conspaziali ed infinitamente vicini. Si ha:

III) *Il carattere cuspidale della curva storta completa* c^n *è uguale alla somma del numero dei punti doppi cuspidali e delle tangenti d'inflessione della* c^n.

INDICE

1. Introduzione sintetica della congruenza di S_7 prima rappresentazione complessa dell'S_3 biduale.
2. Rappresentazione degli ∞^5 E_1 dell'S_3 complesso, nell'$S_7 = S'_3S_3$.
3. Rappresentazione in S_7 degli ∞^1 E_1 di una curva di S_3.
4. La V_4 di S_7 determinata dagli ∞^1 E_2 della curva di S_3, e sue relazioni con la $V_3\eta'$.
5. La V_5 di S_7 determinata dalla superficie sviluppabile osculatrice della curva c^n di S_3.
6. Rappresentazione delle ∞^2 coppie di E_1 di una curva c^n di S_3.
7. Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva storta.

Rappresentazione nell'S_{2r+1} complesso di una serie lineare, secata su una curva dell'S_r complesso da un fascio di ipersuperficie prolungata nel campo biduale.

Nota del Socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 3 marzo 1955)

Sunto. — In una nota precedente [1]) abbiamo studiato la rappresentazione complessa della serie lineare, secata su una curva del piano complesso, da un fascio di curve, prolungata nel campo biduale. Per estendere tale ricerca ad una serie lineare di una curva dell'S_r complesso, si considera la congruenza di rette dell'S_{2r+1} che dà la rappresentazione complessa dell'S_r biduale, e la congruenza di piani (composta con detta congruenza di rette) che rappresenta in S_{2r+1} gli $\infty^{r(r-1)}$ E_1 dell'S_r complesso. Si studiano la V_3^{n+m} determinata [2]) da una curva V_1 di S_r, di ordine n e classe m, e la V_{2r}^{2q} di S_{2r+1} determinata da un fascio di ipersuperficie (V^q_{r-1}) di S_r. Con la superficie intersezione di tali due varietà, spezzata in due rigate e in un numero finito di piani di tale congruenza, si viene a studiare la serie lineare prolungata nel campo biduale; e anche qui si ha che i gruppi di punti della serie sono rappresentati da gruppi di rette di una delle due rigate, e i punti del gruppo jacobiano sono rappresentati, invece, da piani; ciò mette in evidenza che il gruppo jacobiano è costituito da un gruppo di E_1 della curva V_1, dato che quei piani risultano effettivamente facenti parte della suddetta congruenza dell'S_{2r+1} che rappresenta gli E_1 di S_r.

1. Introduzione sintetica della congruenza H_{2r} di rette dell'S_{2r+1} prima rappresentazione complessa dell'S_r biduale.

Consideriamo in un S_{2r+1} complesso due iperspazi S_r ed S'_r indipendenti ed una proiettività w fra S_r ed S'_r. Diciamo H_r l'insieme delle ∞_r rette $g = PP'$, con P e P' punti di S_r ed S'_r omologhi in w (costituenti una varietà di Segre W_{r+1}). Nella stella di S_{r+1} di vertice S'_r consideriamo un S_{r+1} $S'_r P$, con P in S_r, e sia $g = PP'$ la retta di H_r appartenente ad S_{r+1}, e quindi facente parte della stella di rette di S_{r+1} di vertice P'.

---

[1]) N. Spampinato. *Rappresentazione in* S_5 *di un fascio di curve e della serie lineare secata su di una curva complessa prolungata nel campo biduale.* (« La Ricerca » — Istituto Editoriale del Mezzogiorno. Anno IV — 1955.

[2]) N Spampinato. *La varietà dell'* S_5 *complesso determinata da una curva algebrica piana.* « La Ricerca », — Istituto Ed. del Mezzogiorno.

Le ∞^r rette di questa stella, al variare di S_{r-1} fra gli ∞^r S_{r+1} della stella di vertice S'_r, descrivono una congruenza, che indicheremo con H_{2r} dell' S_{2r+1}, di ordine 1, perchè per un generico punto R di S_{2r+1} passa un solo S_{r+1} della stella di vertice S'_r, che seca S_r in un punto P, e detto P' l' omologo di P per la w, la retta $g = P'R$ sarà l' unica retta di H_{2r} passante per R.

Per la congruenza H_{2r} sono singolari solo i punti P' di S'_r, perchè per un tale punto passano ∞^r rette di H_{2r}.

NOTA — E' tale congruenza H_{2r} che, escludendo le rette appartenenti ad S'_r, dà la 1ª rappresentazione cemplessa dell' S_r biduale, e trattata analiticamente nel n° 3.

2. Rappresentazione degli ∞^{2r-1} E_1 di S_r in una congruenza H_{2r-1} di piani di S_{2r+1} composta con la congruenza H_{2r}.

Sia dato in S_r un E_1 di centro P e tangente t, cioè costituito dal punto P e dal punto P_1 infinitamente vicino a P posto nella retta t. Diciamo P' il punto di S'_r omologo di P per la proiettività w. Alla retta t, passante per P, corrisponderà per la w una retta t' di S'_r passante per P'. Il piano Pt', passante per la retta $g = PP'$, ed appartenente all' $S_{r+1} = S'_r P$ della stella di vertice S'_r, si dirà corrispondente dell' E_1 fissato, di centro P e tangente t.

Gli ∞^{2r-1} E_1 di S_r vengono così rappresentati in ∞^{2r-1} piani di S_{2r+1} costituenti, perciò, una congruenza, che indicheremo con H_{2r-1}, costituita da ∞^r stelle di piani, ciascuna contenuta in un $S_{r+1} = S'_r P$ avente per asse la retta $g = PP'$ di H_r uscente dal punto P di S_r. Un tale stella di piani si dirà *stella generatrice* della congruenza H_{2r-1}.

Nel piano Pt', contenente la retta $g = PP'$, si consideri il fascio di rette di centro P'. Questo fascio fa parte della congruenza di rette H_{2r} introdotta nel n° 1. Ne segue che:

I) *La congruenza H_{2r-1} di piani, in cui è rappresentato l' insieme degli ∞^{2r-1} E_1 dell' S_r complesso, è composta con la congruenza H_{2r} che dà la I^a^ rappresentazione complessa dell' S_r biduale.*

Il fascio di rette di centro P' nel piano Pt', facente parte della congruenza H_{2r} che rappresenta l' S_r biduale (di dimensione biduale r e di dimensione complessa 2r) rappresenta un ente dell' S_r biduale costituito da ∞^1 punti, rispondenti alle ∞^1 rette del fascio; tale ente è una *catena unidimensionale speciale* dell' S_r biduale. [Una catena K-dimensionale dell' S_r biduale è l' ente rappresentato dalle rette di H_{2r} appoggiate ad un S_k di S_{2r+1}. Per $k = 1$ si hanno le catene unidimensionali rappresentate dalle rette di H_{2r} appoggiate ad una retta r di S_{2r-1}, costituenti perciò: una rigata quadrica se r non si appoggia all' S'_r singolare per la H_{2r}, un fascio

di rette se r si appoggia ad S'_r. In questo caso, detto P il punto di S_r intersezione con l'S_{r-1} congiungente r con S'_r, e detto P' il punto di S'_r omologo di P per la w, le rette di H_{2r} appoggiate ad r sono quelle del fascio di centro P' e poste nel piano P' r. E in questo caso che la catena unidimensionale si dice *speciale*]. Si ha perciò:

II) *L'insieme delle* ∞^{2r-1} *catene speciali dell'* S_r *biduale è in corrispodenza biunivoca senza eccezioni con gli* ∞^{2r-1} E_1 *dell'* S_r *complesso.*

Nel fascio di rette di centro P', nel piano Pt della congruenza H_{2r-1}, oltre alla retta $g = PP'$, singolare per la congruenza di piani [dato che per essa passano infiniti piani della congruenza] si ha una seconda retta singolare nella retta t', che risulta asse di un fascio di piani della congruenza, e precisamente costituito dai piani che si ottengono proiettando da t' i punti P della punteggiata di sostegno t. Tali ∞^1 piani Pt di H_{2r-1} appartengono all'$S_3 = t't$, e sono i piani tangenti alla quadrica costituita dalle ∞^1 generatrici $g = PP'$ nei punti P' della direttrice t' di detta quadrica; il fascio che essi costituiscono si dirà un *fascio direttore* della congruenza H_{2r-1}. In corrispondenza alle $\infty^{2(r-1)}$ rette t' di S'_r si avranno ∞^{2r-2} fasci direttori della H_{2r-1}. Invece in corrispondenza delle ∞^r rette $g = PP'$ dell'insieme H_r abbiamo nella H_{2r-1} ∞^r stelle generatrici, ciascuna contenente ∞^{r-1} piani. Un fascio direttore è costituito dai piani rispondenti agli ∞^1 E_1 di S_r aventi la stessa tangente in una data retta t; una stella generatrice è costituita dai piani rispondenti agli ∞^{2-1} E_1 di S_r aventi lo stesso centro in un dato punto P. Raccogliendo si ha:

III) *Gli* ∞^{2r-1} *piani generatori della congruenza* H_{2r-1} *sono distribuiti in* ∞^r *stelle generatrici e in* ∞^{2r-2} *fasci direttori. Ai piani di una stella generatrice corrispondono gli* E_1 *di* S_r *aventi uno stesso centro; ai piani di un fascio direttore corrispondono gli* E_1 *di* S_r *avente una stessa tangente. Un piano di* H_{2r-1} *appartiene ad una determinata stella generatrice e ad un determinato fascio direttore. Gli assi delle stelle generatrici sono le* ∞^r *rette* $g = PP'$ *di* H_r *della varietà di* SEGRE W_{r+1}. *Gli assi dei fasci direttori sono le* ∞^{2r-2} *rette* t' *di* S'_r.

3. Gli E_1 di una ipersuperficie algebrica dell'S_r complesso e le catene di punti biduali che essi determinano.

Nell'S_r complesso si fissi un sistema di coordinate $(x_1, \ldots, x_{r+1})$, e sia data un'ipersuperficie algebrica V^n_{r-1} irriducibile di equazione:

$$f(x_1, \ldots x_{r+1}) = 0 \tag{1}$$

Se X (x_j) è un punto di V_{r-1} e Y (y_j), distinto da X, e soddisfacente all'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} = 0 , \tag{2}$$

[non identicamente soddisfatta se X è semplice per la V_{r-1}], l' E_1 di centro X e di tangente XY appartiene alla V_{r+1}, dato che la retta XY risulta appartenente all' iperpiano tangente alla V_{r+1} nel punto X. Se X è multiplo per la V_{r+1} la (2) risulta identicamente soddisfatta e quindi tutti gli E_1 di centro X appartengono alla V_{r-1}. Si ha perciò:

I) *Il sistema delle due equazioni* (1) *e* (2), *nelle* $2r + 2$ *variabili* (x_j, y_j), *dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'* E_1 *di centro* $X(x_j)$ *e di tangente* XY, *con* $Y(y_j)$, *appartenga alla ipersuperficie* V_{r+1} *di equazione* (1).

Si osservi ora che il sistema delle due equazioni (1) e (2) è il sistema a cui equivale, nel campo complesso, l' equazione, nel campo biduale:

$$f(\mu_1, \ldots, \mu_{r+1}) = 0 \tag{3}$$

prolungamento della (1), ottenuta sostituendo alle variabili complesse x_j le variabili biduali $\mu_j = x_j\, u + y_j\, v$ [indicando con u il modulo e con v la seconda unità, divisore dello zero, con $v^2 = 0$] dato che si ha:

$$f(\mu_1, \ldots, \mu_{r+1}) = f(x_1, \ldots, x_{r+1})\, u + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1}\right) v \,, \tag{4}$$

e quindi l' equazione (3) equivale al sistema delle due equazioni (1) e (2). Segue che se il punto biduale di coordinate biduali (μ_j) appartiene alla V_{r+1} di equazione (1) [quando si considerano in essa non solo i punti complessi, ma anche quelli biduali], dalla (3), soddisfatta per ipotesi, segue che è soddisfatto il sistema (1) e (2) quindi, per la proposizione I), appartiene alla V_{r-1} l' E_1 di centro X e di tangente XY. e viceversa. Si ha perciò:

II) *L' appartenenza alla ipersuperficie* V_{r+1} *dell'* E_1 *di centro* $X(x_j)$ *e di tangente* XY, *con* $Y(y_j)$, *equivale all'appartenenza alla* V_{r+1} *del punto biduale* $(x_j\, u + y_j\, v)$.

Si noti ora che nella determinazione dell' E_1 di centro X e tangente XY al punto Y si può sostituire un qualunque punto della retta XY, purchè distinto da X, e quindi *alle variabili* (y_j) *si possono sostituire le* $r + 1$ *somme* $(\rho x_j + \sigma y_j)$ *con* $\sigma \neq 0$.

Si noti inoltre che se nella (4) alte (y_j) si sostituiscono le $\rho x_j + \sigma y_j$, la forma a coefficiente di v nel secondo membro da:

$$\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} x_{r+1}\right) + \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1}\right) =$$

$$= n\rho f(x_1, \ldots, x_{r+1}) + \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1}\right) \tag{5}$$

e l'annullare questo coefficiente di v [quando si è annullato il coefficiente di u nella (4), cioè è soddisfatta la (1)] porta all' equazione (2) essendo $\sigma \neq 0$. Si ha perciò:

III) *Se la ipersuperficie* V_{r-1} *contiene il punto biduale* $(x_j\, u + y_j\, v)$ *contiene di conseguenza gli* ∞^1 *punti biduali* $[x_j\, u + (\rho x_j + \sigma y_j)\, v]$, con $\sigma \neq 0$.

Si noti che per $\sigma = 0$ il punto suddetto non è più biduale perchè è dato da $[x_j\,(u + \rho v)]$ e quindi, dividendo per il fattore (non nullo, nè divisore dello zero) $u + \rho v$, risulta con le coordinate $(x_j\, u)$, cioè è un punto complesso, perchè le coordinate appartenenti al corpo complesso contenuto nell' algebra dei numeri biduali, costituito dai multipli xu del modulo u con x complesso.

Dalle proprietà II) e III) segue che:

IV) *L' appartenenza alla ipersuperficie* V_{r-1} *dell'* E_1 *di centro* $X\,(x_j)$ *e di tangente* XY, *con* $Y\,(y_j)$ *porta di conseguenza l' appartenenza alla* V_{r-1} *degli* ∞^1 *punti biduali* $(x_j\, u + (\rho x_j + \sigma y_j)\, v)$, con $\sigma \neq 0$ [Per $\sigma = 0$ si ha il punto complesso $X\,(x_j)$].

Dimostriamo ora che *tali* ∞^1 *punti biduati costituiscono una catena speciale dell'* S_r *biduale, e precisamente quella catena che risponde all'*E_1 *considerato per la proposizione II*). A tale fine occorre richiamare l' introduzione analitica della congruenza H_{2r} di retta dell' S_{2r+1} che dà la prima rappresentazione complessa dell' S_r biduale, già data sinteticamente nel n° 1.

Introdotto in S_{2r+1} un sistema di coordinate

$$(x_1\,,\ y_1\,,\ x_2\,,\ y_2\,,\ \ldots\,,\ x_{r+1}\,,\ y_{r+1})\,, \tag{6}$$

in tal modo che i due iperspazi S_r ed S'_r considerati nel n° 1, siano quelli di equazioni:

$$(S_r) \qquad y_1 = y_2 = \ldots = y_{r+1} = 0\,,$$

$$(S'_r) \qquad x_1 - x_2 = \ldots = x_{r+1} = 0\,,$$

e supposto che la proiettività w fra S_r ed S'_r [assumendo in S_r le coordinate x_j) ed in S'_r le coordinate (y_j)] siano:

$$(w) \qquad x_1 = y_1\ ,\ x_2 = y_2\ ,\ \ldots\,,\ x_{r+1} = y_{r+1}\,,$$

il punto biduale

$$(x_1\, u + y_1\, v\ ,\ x_2\, u + y_2\, v\ ,\ x_{r+1}\, u + y_{r+1}\, v) \tag{7}$$

è rappresentato in H_{2r+1} dalla retta congiungente i due punti avente per coordinatè le due righe della matrice:

$$(8) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_{r+1} & y_{r+1} \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & \dots & 0 & x_{r+1} \end{matrix} \right\|$$

cioè dalla retta descritta dal punto:

$$(9) \qquad (hx_1 \ , \ hy_1 + x_1 \ , \ hx_2 \ , \ hx_2 + y_2 \ , \dots , \ hx_{r+1} \ , \ hy_{r+1} + x_{r+1}) \ ,$$

appoggiata ad S'_r nel punto dato dalla seconda riga della matrice (8), [che si ha per $h = 0$].

Per avere la rappresentazione degli ∞^1 punti biduali, di cui sopra, $(x_j \, u + (\rho x_j + \sigma y_j) \, v)$, con le ∞^1 rette ciascuna descritta da un punto di coordinate (9), occorre sostituire alle y_j [coefficenti dell' unità v nella (7)] le somme $\rho x_j + \sigma y_j$. Con tale sostituzione le (9) danno:

$$(10) \qquad [hx_1 \ , \ h(\rho x_1 + \sigma y_1) + x_1 \ , \dots \ , \ hx_{r+1} \ , \ h(\rho x_{r-1} + \sigma y_{r+1}) + x_{r+1}]$$

ovvero, posto $h\rho + 1 = k \quad , \quad h\sigma = l$

$$(10') \qquad (hx_1 \ , \ kx_1 + ly_1 \ , \ \dots \ , \ hx_{r+1} \ , \ kx_{r+1} + ly_{r+1}).$$

Il punto di coordinate (10'), al variare dei parametri h, k, l, descrive il piano di S_{2r+1} congiungente i tre punti:

$$(11) \qquad X \, (x_1 \ , \ 0 \ , \ x_2 \ , \dots , \ x_{r+1} \ , \ 0) \ ,$$

$$(12) \qquad X' \, (0, \ x_1 \ , \ 0, \ x_2 \ , \dots , \ 0 \ , \ x_{r+1}) \ ,$$

$$(13) \qquad Y' \, (0, \ y_1 \ , \ 0, \ y_2 \ , \dots , \ 0 \ , \ y_{r+1}) \ ,$$

con X in S_r, X' in S'_r ed omologo di X nella proiettività w di equazioni (w, ed infine con Y' in S'_r. Sicchè il piano XX'Y' seca S'_r nella retta X'Y'. Le ∞^1 rette rispondenti agli ∞^1 punti biduali considerati costituiscono nel piano XX'Y' il fascio centro X' [che si ha per $h = 0$, e quindi $k = 1$ e $l = 0$]. La particolare retta del fascio che risponde al punto complesso che si ottiene per $\sigma = 0$ è la retta $g = XX'$, perchè per $\sigma = 0$ è $l = 0$, nel qual caso le coordinate (10') dànno:

$$(10'') \qquad (hx_1 \ , \ kx_1 \ , \dots , \ hx_{r+1} \ , \ kx_{r+1})$$

e questo punto di S_{2r-1}, al variare di h e k, descrive la retta $g = XX'$ congiungente i due punti X ed X' corrispondentisi nella proiettività w. Si noti che il piano XX'Y' è un piano della congruenza H_{2r-1}, e la retta g appartiene all' insieme di rette H_r della W_{r+1}, assi delle stelle generatrici di H_{2r-1}. Le ∞^1 rette del fascio suddetto di centro X' appartengono alla congruenza H_{2r}. E' così dimostrato che gli ∞^1 punti biduali $(x_j \, u + (\rho x_j + \sigma y_j \, v)$, di cui nella proposizione IV), costituiscono una *catena speciale* dell' S_r biduale, perchè rappresentati da un fascio di rette (della congruenza H_{2r})

con il centro in punto X' di S'_r e poste in un piano secante S'_r in una retta (la retta X'Y') e quindi appoggiate ad una retta r, fissata genericamente in tale piano, e perciò interessante S'_r. A complemento dalla proposizione IV. si ha perciò:

V) *In corrispondenza ad ogni* E_1 *della ipersuperficie* V_{r-1} *fissata nell'* S_r (x_j) *complesso si ha nella* V_{r-1} *una catena speciale di punti biduali: quella che risponde all'* E_1 *per la proposizione* II, *e rappresentata da un fascio di rette della congruenza* H_{2r} *appartenenti ad un piano della congruenza* H_{2r-1}.

Se l' E_1 *ha il centro* X *e la tangente* XY, *detti* X' *e* Y' *i punti omologhi di* X *ed* Y *per la proiettività* w *fra* S_r *ed* S'_r, *tale fascio di rette di* H_{2r} *è il fascio di centro* X' *nel piano* XX'Y' *di* H_{2r-1}, *congiungente il punto* X *della* V_{r-1}, *centro dell'* E_1, *con la retta* X'Y' *di* S'_r *omologa, per la proiettività* w, *alla tangente* XY *dell'* E_1.

4. La V_{2r-1} di S_{2r-1} determinata dalla V_{r-1} completa di S_r, composta con la congruenza H_{2r-}.

L'ipotesi che l'E_1 di centro X (x_j) e di tangente XY con Y (y_j) appartenga alla V_{r-1} di equazione (1) porta che le due $(r+1)$-ple di variabili x_j ed y_j soddisfano alle due equazioni (1) e (2). Essendo la (2) omogenea, sia rispetto alle x_j, sia rispetto alle y_j, ogni punto del piano congiungente i tre punti (11) (12) e (13), cioè del piano XX'Y', appartiene alla V_{2r-1} di S_{2r-1} rappresentata dal sistema delle due equazioni (1) e (2), sistema che, come abbiamo osservato, equivale nel campo complesso all'equazione, nel campo biduale, (3). *Tale* V_{2r-1}, *determinata in* S_{2r-1} *dalla ipersuperficie* V_{r-1} *di* S_r, *è perciò costituita dagli* ∞^{2r-3} *piani* XX'Y' *rispondenti agli* ∞^{2r-3} E_1 *della* V_{r-1}, *e costituisce la prima rappresentazione complessa della ipersuperficie dell'* S_r *biduale ottenuta prolungando nel campo biduale la ipersuperficie complessa dell'* S_r *complesso* V_{r-1}. La V_{2r-1} è di ordine n^2, se diciamo n l'ordine della V_{r-1}. *Con i suoi* ∞^{2r-3} *piani generatori, rappresenta gli* ∞^{2r-3} E_1 *della* V_{r-1}.

a) NEL CASO $r = 2$ si hanno gli ∞^1 piani generatori di una $V_3^{n^2}$ di S_5 che rappresentano gli ∞^1 E_1 di una V_1^r di S_2. In questo caso però, per ogni punto eventuale P multiplo per la V_1 si hanno ∞^1 E_1 (quelli di centro P) appartenti alla V_1, *e quindi la* V_3 *in tal caso si spezza*, in un numero finito di S_3 rispondenti ai punti multipli della V_1 ed a una V_3 residua di ordine $n+m$ essendo m la classe della V_1. Gli S_3 che si staccano dalla V_3, di ordine n^2 si ottengono congiungendo i punti multipli distinti della V_1 di S_2 con S'_2, ciascuno contato tante volte quant'è la *multiplicità completa* del punto multiplo che lo determina.

b) NEL CASO, $r > 2$, l'S_{r+1} proiettante un punto multiplo X della

V_{r-1} da S'_r appartiene sempre alla V_{2r-1}, ma non si stacca da essa essendo per $r > 2$, $r + 1 < 2r - 1$. Tale $S_{r+1} = XS'_r$ contiene la stella di piani di asse XX' rispondente agli ∞^{r-1} E_1 di centro X di S_r, appartenenti tutti V_{r-1} dato che X è multiplo per essa. Si noti che le derivate della forma $f(x_j)$ calcolate nel punto multiplo X sono tutte nulle e quindi la (2) risulta identicamente soddisfatta, qualunque siano le y_j, e l'$S_r = XS'_r$ appartiene alla V_{2r-1}. Se invece X è semplice per la V_{r-1} la (2) è l'equazione, lineare nelle y_j dell'S'_{r-1} tangente alla V'_{r-1} in X' [indicando con V'_{r-1} la ipersuperficie di S'_r omologa della V_{r-1} per la proiettività w di equazioni (w)]. In questo caso appartengono alla V_{2r-1} gli ∞^{r-2} piani di H_{2r-1} passanti per la retta XX' ed appartenenti all'iperspazio congiungente X con detto S'_{r-1} tangente alla V'_{r-1} in X'. Si ha perciò:

I) *La* V_{2r-1} *di equazioni* (1) *e* (2) *contiene ogni iperspazio congiungente ogni punto semplice* X *della* V_{r-1} *di* S_r *con l'iperpiano* S'_{r-1} *di* S'_r *omologo per la proiettività* w *dell'iperpiano tangente alla* V_{r-1} *in* X, *ed ogni* S_{r-1} *congiungente ogni eventuale punto multiplo di* V_{r-1} *con l'* S'_r; *contenente in entrambi i casi una stella di piani (della congruenza* H_{2r-1}*) passanti per* XX'; *rispondenti agli* E_1 *della* V_{r-1} *di centro* X, *che sono* ∞^{r-2} *per* X *semplice, e* ∞^{r-1} *per* X *multiplo, per la* V_{r-1}.

Gli ∞^{r-1} $S_r = XS'_{r-1}$ rispondenti agli ∞^{r-1} punti semplici della V_{r-1}, e le loro posizioni limiti al tendere di un punto semplice ad un punto multiplo della V_{r-1}, variando in un ramo della V_{r-1} con l'origine in un tale punto multiplo, si diranno *gli* S_r *generatori della* V_{2r-1}, e rispondono alle ∞^{r-1} *coppie punto iperpiano tangente della* V_{r-1} *completa*. Gli ∞^{2r-3} piani XX'Y' di cui sopra, rispondenti agli ∞^{2r-3} E_1 della V_{r-1}, si diranno *piani generatori* della V_{2r-1}.

5. La V_3^{n+m} determinata dagli E_1 di una curva di ordine n e classe m di un S_k di S_r.

Consideriamo una curva irriducibile algebrica V_1, di ordine n e classe m, di un S_k di S_r. Per $k = 2$, cioè nel caso di V_1 piana, la sua classe è il numero delle tangenti passanti per un punto. Per $k > 2$ la classe di V_1 è l'ordine della superficie rigata V_2^m costituita dalle tangenti a V_1, cioè il numero delle tangenti a V_1 che si appoggiano ad un S_{k-2} di S_k. In particolare se è $k = r$, cioè la V_1 appartiene all'S_r, sarà m il numero delle tangenti a V_1 appoggiata ad un S_{r-2} di S_r.

Per ogni E_1 di V_1 di centro X e tangente XY, e con X semplice in V_1 e XY retta tangente a V_1 in X, consideriamo il piano XX'Y' della congruenza H_{2r-1} rispondente a detto E_1. Si avranno così, nell'S_{2k+1} congiungente l'S_k ambiente della V_1 con l'S'_k omologo di S_k nella proiettività w, ∞^1 piani costituenti una varietà V_3, che si dirà determinata dalla curva V_1.

Per determinare l'ordine di detta V_3, dell'S_{2k+1}, sechiamola con un iperpiano S_{2k} di S_{2k+1} passante per S'_k. La superficie sezione V_2 sarà costituita dagli n piani generatori della V_3 uscenti dagli n punti in cui la V_1 di S_k è secata dall'iperpiano S_{k-1} che l'S_{2k} seca in S_k (dato che ciascuno di essi ha una retta in S'_k, contenuto in S_{2k}) e nella superficie V'_2 di S'_k costituita dalle rette che i piani generatori della V_3 hanno in S'_k, cioè dalle tangenti alla curva V_1 omologa di V_1 nella proiettività w. Tale V'_2 è quindi di ordine m. La V_3 è, pertanto, di ordine $n + m$. Si ha perciò:

I) *Agli* ∞^1 E_1 *di una curva algebrica* V^n *di un* S_k *di* S_r *rispondono nella congruenza di piani* H_{2r-1} *dell'* S_{2r-1} ∞^1 *piani, costituenti una* V_3 *di ordine* n + m, *essendo* n *ed* m *l'ordine e la classe di* V_1. *La* V_3^{n+m} *appartiene all'* S_{2k+1} *congiungente l'* S_k *con l'* S'_k *di* S'_r *omologo di* S_k *nella proiettività* w,

Se in ogni piano generatore XX'Y' della V_3 si considera la retta di H_r XX', si avranno ^{1} rette costituenti le generatrici di una V_2^{2n} rigata, ottenute congiungendo le coppie di punti (X,X') delle due curve V_1 e V'_1 corrispondentisi nella proiettività w. Si ha dunque:

II) *Le* ∞^1 *rette di* H_r *appartenenti agli* ∞^1 *piani generatori della* V_3^{n+m}, *determinata dalla curva* V_1, *costituiscono una rigata* V_2^{2n}.

Si noti che il piano XX'Y' generatore della V_3^{n+m}, contenente la generatrice $g = XX'$ della V_2^{2n}, essendo la retta X'Y' tangente nel punto X' alla curva V'_1 (che, come V_1, è pure una direttrice della rigata V_2^{2n}) risulta tangente alla V_2^{2n} nel punto X', perchè congiunge la generatrice XX' con la tangente X'Y' in X' a V'_1. Si ha perciò:

III) *La* V_3^{n+m} *è costituita dai piani tangenti alla rigata* V_2^{2n} *nei punti della direttrice* V'_1, *omologa della* V_1 *che la determina nella proiettività* w.

6. La V_{2r-1} di S_{2r-1} determinata da una V_{r-1} di S_r dodata di una V_{r-2} multipla.

Nel n° 4 abbiamo notato che in corrispondenza ad un punto X multiplo per la V_{r-1} fissata in S_r, e quindi centro di ∞^{r-1} E_1 della V_{r-1}, si ha nell'V_{2r-1} una stella di ∞^{r-2} piani di H_{2r-1} avente per asse la retta XX'. Tali piani, ottenuti congiungendo X con le ∞^{r-1} rette della stella di centro X' dell'S'_r, costituiscono l'S_{r+1} congiungente X con S'_r, sicchè *la* V_{2r-1}, *in corrispondenza ad ogni punto multiplo* X *della* V_{r-1}, *contiene l'* $S_{r+1} = XS'_r$. Segue che, se la V_{r-1} ha una varietà V_{r-2} multipla, in corrispondenza agli ∞^{r-2} punti di questa V_{r-2} si avranno, nella V_{2r-1}, ∞^{r-2} S_{r+1} costituenti una varietà di dimensione $2r-1$, che si staccherà, pentanto, dalla V_{2r-1}. Per determinarne l'ordine sechiamola con un S_{r+3} congiungente l'S'_r con un piano di S_r secante perciò la V_{r-2} multipla della V_{r-1} in q punti, se indichiamo con q il suo ordine; i q S_{r+1} proiettanti da S'_r tali q punti costituiranno l'intersezione della varietà con l'S_{r+3}. Sarà

quindi q l'ordine della V_{2r-1} che si stacca dalla $V^{n^2}_{2r-1}$ determinata dalla V^n_{r-1}. Si ha perciò:

I) *La* $V^{n^2}_{2r-1}$ *determinata da una* V^n_{r-1} *irriducibile di* S_r *nell'* S_{2r+1}, *risulta riducibile se la* V_{r-1} *contiene una* V_{r-2} *multipla. In corrispondenza ad ogni* V^q_{r-2} *multipla di ordine* q, *si stacca dalla* $V^{n^2}_{2r+1}$ *una* V^q_{2s-1}, *costituita dagli* ∞^{r-2} S_{r-1} *che si ottengono proiettando da* S'_r *i punti* X *della* V^n_{r-2} *multipla. Ogni tale* S_{r+1} *è l'ambiente della stella generatrice degli* ∞^{r-1} *piani di* H_{2r-1} *determinati dagli* ∞^{r-1} E_1 *della* V_{r-1} *aventi il centro nel punto multiplo* X *che lo determina.*

NEL CASO $r = 2$ si ha: [3]

II) *La* V_3 *di ordine* n^2 *determinata nell'* S_5 *da una curva* V^n_1 *dell'* S_2 *irriducibile, risulta riducibile quando la* V_1 *è dotata di punti multipli. In corrispondenza ad ogni punto multiplo* X *della* V_1 *si stacca dalla* $V^{n^2}_3$ *l'*$S_3 = XS'_2$, *ambiente del fascio dei piani, di asse* XX' *di* H_3 *determinati dagli* ∞^1 E_1 *aventi per centro il punto multiplo* X. E' già dimostrato che tale $S_3 = XS'_2$ si stacca dalla V_3 tante volte quant'è l'abbassamento della classe della V_1 prodotto dal punto multiplo X. La V_3 residua è di ordine $n + m$, ed è costituita dai piani di H_3 rispondenti ai punti semplici di V_1 (e dalle posizioni limiti di un tale piano col tendere del punto semplice che lo determina ad un punto multiplo di V_1). Si noti che per V^n_1 priva di punti multipli è $m = n\ (n-1)$ e quindi $n + m$ raggiuge il massimo valore n^2. L'abbassamento della classe prodotto da un punto multiplo X l'abbiamo definito *multiplicità completa di* X *per la* V_1 Per X doppio tale multiplicità è 2 o 3 secondo che le due tangenti a V_1 in X sono distinte o infinitamente vicine (punto doppio cuspidale).

N O T A.

NEL CASO $r = 3$ [4]) la V_5 di ordine n^2 determinata in S_7 da una superficie V^n_2 dell'S_3 non risulta irriducibile se la V_2 non è dotata di qualche curva multipla, perchè in corrispondenza ad un punto multiplo X della V_2 si ha nella V_5 un S_4, l'$S_4 = XS'_3$, ambiente della stella di piani, di asse

---

[3]) N. Sampinato: a) *Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa.*

b) *Le falde tridimensionali dell'* S_5 *determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa.*

c) *Rappresentazione in* S_5 *del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali.* (Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Serie 4 — Vol. XXII — 1955).

[4]) N. Sampinato. *Carattere singolare e cuspidale di una curva storta completa* (Rend. dell'Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Serie 4 — Vol. XXIII — 1956).

XX', di H_3, determinata dagli ∞^2 E_1 della V_2 avente per centro il punto multiplo P.

Quando la superficie V_2 dell' S_3 complesso si prolunga nel *campo triduale, anzichè nel campo biduale,* e si considera la rappresentazione dell' S_3 triduale in una congruenza di piani dell' S_{11} la V_2, triduale risulta rappresentata da una V_8 costituita da ∞^2 S_6 generatori di ordine n^3. *In questo caso la presenza di un punto multiplo nella* V_2 *porta alla riducibilità della* V_8, perchè dalla V_8 si stacca un S_8 determinata dal punto multiplo, contato tante volte quant' è l' abbassamento della classe della superficie V_2 prodotto dalla presenza di tale punto multiplo. Ciò dipende dalla circostanza che l' S_6 generatore della V_8 rispondente ad un punto semplice X della V_2 è determinato in S_{11} dagli ∞^1 E_1 della V_2 di centro X, cioè dalla coppia punto-piano costituita da X e dal piano tangente alla V_2 in X. *Quando* X *è multiplo per la* V_2 *esso e centro di* ∞^2 E_1 *che determinano* ∞^2 *coppie punto-piano* (X, π), *con* π *passante per* H. *In corrispondenza si hanno nella* V_8 ∞^2 S_6 *generatori costituenti un* S_8 *determinato da* X, *che si stacca dalla* V_8.

NEL CASO GENERALE, $r > 2$, se si vuole che la presenza di un punto multiplo X nella V_{r-1} produca lo staccamento dalla varietà determinata dalla V_{r-1} di un iperspazio, basta ricorrere alla rappresentazione complessa della ipersuperficie V_{r-1} *prolungata nel campo r-duale.* Restando nel campo biduale la riducibilità della varietà V_{2r-1} determinata dalla V_{r-1} si ha solo se la V_{r-1} ha una varietà multipla di dimensione massima: $r - 2$.

Tale V_{2r-1} dell' S_{2r+1}, determita dalla V_{r-1} prolungata nel campo biduale interessa, invece, per lo studio della rappresentazione della serie lineare secata sopra una V_1 da un fascio di ipersuperficie descritto dalla V_{r-1}, serie lineare che risulterà rappresentata, nella V_3^{n+m} rispondente alla V_1, dalla intersezione di questa con la ipersuperficie V_{2r} di S_{2r+1} descritta dalla V_{2r-1} al variare della V_{r-1} nel fascio. Sarà messo così in evidenza il diverso tipo di rappresentazione dei punti costituenti un gruppo della serie lineare dalla rappresentazione dei punti del gruppo jacobiano della serie, derivante dal fatto che questi sono, invero, degli E_1 della V_1, perchè provenienti dai punti di contatto della V_{r-1} del fascio che toccano la V_1.

7. La ipersuperficie di S_{2r-1} determinata da un fascio di ipersuperficie di S_r. Gl' iperconi quadrici determinati dai fasci d' iperpiani.

In S_r consideriamo un fascio di ipersuperficie di equazioni:

$$\lambda f(x_j) + \mu g(x_j) = 0. \tag{14}$$

Le ∞^1 V_{r-1} del fascio determineranno in S_{2r-1} ∞^1 V_{2r-1} (n° 4) costituenti, perciò, una varietà di dimensione $2r$, V_{2r}, che si dirà determinata

in S_{2r+1} dal fascio (14). Ciascuna V_{2r-1}, generatrice di tale ipersuperficie V_{2r} è di ordine n^2, se diciamo n l'ordine delle V_{r-1} del fascio (14), ed è rappresentata dal sistema che si ottiene associando all'equazione (1) di una tale V_{r-1} l'equazione (2) (n° 4), e quindi, nel caso attuale, dal sistema dell'equazione (14), che rappresenta la generica V_{r-1} del fascio, e all'equazione:

$$(15) \quad \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} \right) + \mu \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} \right) = 0 .$$

Ne segue che l'equazione della V_{2r} si ottiene eliminando i due parametri omogenei λ e μ, al variare dei quali varia V_{2r-1} rappresentata dal sistema (14) e (15). Con tale eliminazione si ottiene l'equazione di grado $2n$, nelle $2(r+1)$ variabili x_j, y_j:

$$(16) \quad f(x_j) \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} \right) - g(x_j) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} \right) = 0 .$$

Essendo la (1) omogenea di grado $2n-1$ rispetto alle x_j e omogenea di grado 1 rispetto alle y_j *la* V^{2n}_{2r} *che essa rappresenta avrà come semplice* l'$S_r(x_j)$ *di equazioni* $y_j = 0$, *e come* $(2n-1)$-plo l'$S'_r(y_j)$ *di equazioni* $x_j = 0$. Tale ipersuperficie, determinata nell'S_{2r+1} dal fascio (14), risulta costituita da ∞^r S_r *generatori* essendo ciascuna delle sue V_{2r-1} generatrici costituita da ∞^{r-1} S_r (proprietà I del n° 4). Per un punto X di $S_r(x_j)$, che non sia punto base del fascio (14), passa una V_{r-1} del fascio; la V_{2r-1} determina da questa avrà un $S_r = XS'_{r-1}$ generatore, con S'_{r-1} in S'_r, e quindi sarà un S_r generatore della V_{2r} passante per X, ed appoggiato ad S'_r nell'S'_{r-1} omologo per la proiettività w dell'iperpiano tangente alla V_{r-1} in X. Un tale S_r generatore, passante per X, si può ottenere secando la V_{2r} con l'$S_{r+1} = XS'_r$; si otterrà una V_r intersezione di ordine $2n$ spezzata nell'S'_r, [$(2n-1)$-plo per la V_{2r}], contato $2n-1$ volte e in un S_r residuo, che secherà $S_r(x_j)$ nel punto X, che è semplice per la V_{2r}.

Secando, invece la V_{2r} con un $S_{r+1} = YS_r$ della stella di vertice $S_r(x_j)$, ottenuto congiungendo questo vertice con un punto Y fissato in S'_r, si ottiene una V^{2n}_r spezzata in S'_r e in una V^{2n-1}_r residua che avrà Y come $(2n-1)$-plo, essendo l'$S'_r(y_j)$ $(2n-1)$-plo per la V_{2r}. Tale V^{2n-1}_r residua sarà, perciò, un cono di vertice Y, che si dirà *cono direttore* della V_{2r}. Raccogliendo si ha:

I) *Il fascio di ipersuperficie* (14) *di* $S_r(x_j)$ *determina nell'* S_{2r+1} *una*

ipersuperficie V_{2r}^{2n} *di equazione* (16) *costituita da* ∞^1 V_{2r-1}, *composta con* ∞^r S_r *generatori e* ∞^r V_r^{2n-1} *coni direttori.*

Si noti che se R è un punto della V_{2r}, e diciamo X e Y i punti proiezioni di R su S_r ed S'_r rispettivamente da S'_r ed S_r, e quindi con la retta XY passante per R, *passerà per* R *l'* S_r *generatore determinato da* X *ed il cono direttore determinato da* Y.

NEL CASO $n = 1$ posto:

$$f(x_j) = a_1 x_1 + \ldots + a_{r+1} x_{r-1} \tag{17}$$

$$g(x_j) = b_1 x_1 + \ldots + b_{r+1} x^{\cdot}_{+1}\ , \tag{18}$$

la V_{2r-1} è l'iperquadrica di equazione (ricavata dalla (16) per le posizioni (17) e (18)):

$$(a_1 x_1 + \ldots + a_{r+1} x_{r+1})(b_1 y_1 + \ldots + b_{r+1} y_{r+1}) - \\ - (b_1 x_1 + \ldots + b_{r+1} x_{r+1})(a_1 y_1 + \ldots + a_{r+1} y_{r+1}) = 0. \tag{19}$$

Posto

$$c_{ij} = a_i b_j - b_i a_j \tag{20}$$

il primo membro $F(x_1, y_1, \ldots, x_{r+1}, y_{r+1})$ risulta dato da:

$$F(x_1, y_1, \ldots, x_{r+1}, y_{r+1}) = \Sigma\, c_{ij}(x_i y_j - y_i x_j). \tag{1}$$

Si noti che le c_{ij} dànno i valori dei minori del 2° ordine della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{r+1} \\ b_1 & b_2 & \ldots\ldots & b_{r+1} \end{matrix} \right\|\ , \tag{21}$$

e quindi sono le coordinate dell'S_{r-2} intersezione dei due iperpiani di equazioni

$$f(x_j) = 0\ \ ,\ \ g(x_j) = 0 \tag{22}$$

che determinano il fascio di iperpiani dato in $S_r(x_j)$.

L'iperquadritica $F = 0$ ha l'equazione combinazione lineare, secondo i numeri c_{ij}, delle equazioni

$$x_i y_j - y_i x_j = 0\ , \qquad (i, j = 1, \ldots, r+1)\ \ (i \neq j) \tag{23}$$

perciò appartiene al sistema lineare determinato dagli iperconi di equazioni (23).

Si noti ora che tutte le iperquadritiche di detto sistema sono iperconi.

L' iperquadrica $F = 0$ risulta, infatti, un ipercono perchè le equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate di F sono:

$$(24) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i (b_1 y_1 + \ldots + b_{r+1} y_{r+1}) - b_i (a_1 y_1 + \ldots + a_{r+1}) = 0$$

$$(25) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} = b_i (a_1 x_1 + \ldots + a_{r+1} x_{r+1}) - a_i (b_1 x_1 + \ldots + b_{r+1} x_{r+1}) = 0,$$

e queste equazioni nell' S_{2r+1} $(x_1, y_1, \ldots, x_{r+1}, y_{r+1})$ rappresentano l' S_{2r-3} di equazioni:

$$(26) \qquad \begin{cases} a_1 x_1 + \ldots + a_{r+1} x_{r+1} = 0 \\ a_1 y_1 + \ldots + a_{r+1} y_{r+1} = 0 \\ b_1 x_1 + \ldots + b_{r+1} x_{r+1} = 0 \\ b_1 y_1 + \ldots + b_{r+1} y_{r+1} = 0 \end{cases}$$

i cui punti sono tutti punti doppi dell' iperquadrica. Questa è dunque un ipercono avente per vertice l' S_{2r-3} di equazioni (26) [cioè l' S_{2r-1} congiungente l' S_{r-2} centro del fascio di iperpiani dato in S_r (x_j) con l' S'_{r-2} omologo di detto centro nella proiettività w fra S_r ed S'_r, dato che la prima e terza dell' equazioni (26) rappresentano in S_r (x_j) detto centro S_{r-2}, e la terza e qnarta delle (26) rappresentano in S'_r (y_j) l' S'_{r-2} perchè si ottengono dalle precedenti con la sostituzione $x_j = y_j$]. Si noti che la prima e terza dell' equazioni (26) sono le (22), che rappresentano appunto detto centro S_{r-2} intersezione dei due iperpiani determinanti il fascio, ed avente come coordinate le c_{ij} che sono i numeri secondo cui bisogna combinare linearmente gli iperconi (23) per avere l' ipercono $F = 0$. Si ha perciò:

II) *Il fascio di iperpiani di* S_r *determinato dai due iperpiani* (17) *e* (18), *determina, nell'* S_{2r+1}, *una iperquadrica* V^2_{2r} *di equazione* $F=0$, *con* F *forma data dalla* (21). *Tale iperquadrica è un ipercono avente per vertice l'* S_{2r-3} *congiungente il centro* S_{r-2} *del fascio di iperpiani, dato in* S_r, *con l'* S'_{r-2} *suo omologo in* S'_r, *nella proiettività* w. *L' equazione* $F = 0$ *si ottiene combinando linearmente le equazioni* (23) *secondo i numeri* c_{ij} *dati dalle* (20), *coordinate grasmaniane del centro* S_{r-2} *del fascio.*

8. I piani della congruenza $H_{2,-1}$ di S_{2r+1} determinati dagli E_1 costituenti il gruppo jacobiano di una serie lineare g^1_N di una V_1 di S_r ed i gruppi di N rette di H_r determinati dai gruppi di g^1_N.

Sia data nell' S_r (x_j) una curva algebrica irriducibile V^n_1 ed un fascio di ipersuperficie (V_{r-1}) determinanti nell'S_{2r+1} una V_3 (n° 5) e una V_{2r} (n° 7). Il fascio (V_{r-1}) sechi sulla V_1 una serie lineare g^1_N, esclusi eventuali punti

fissi comuni alla V_1 e alla varietà base del fascio. Un generico gruppo G_N di g^1_N, costituito da N punti distinti $P_1, \ldots, P_N$, determina N rette $P_sP'_s$ con P'_s omologo di P_1 nella proiettività w, appartenenti, perciò, alla rigata V_2^{2n} contenuta nella V_3^{n+m} determinata dalla V_1. Variando G_N nella g^1_N tali N rette $P_sP'_s$ descriveranno detta rigata costituendo in essa, considerata come ente algebrico ad una dimensione costituito delle sue ∞^1 generatrici, una serie lineare che si dirà determinata nella V_2^{2n} della V_3 dalla serie g^1_N.

Se il gruppo $P_1, \ldots, P_N$ di g^1_N contiene un punto del gruppo jacobiano della serie, costituito dai due punti infinitamente vicini P_1 e P_2, la retta $t = P_1P_2$ tangente a V_1 dovrà appartenere all' S_{r-1} tangente in P_1 alla ipersuperficie del fascio passante per P_1. Detta t' la retta di S'_r omologa di t per la proiettività w, il piano $P\,t'$ sarà il piano generatore della V_3 uscente da P_1 e detto S_{r-1} l' iperpiano di S'_r omologo di S_{r-1} per w, l'iperspazio $S_r = P_1S'_{r-1}$ sarà l' S_r generatore della V_{2r} uscente da P_1. Ne segue che il piano P_1t' appartiene all' $S_r = P_1S'_{r-1}$, e quindi farà parte della superficie intersezione della V_3 con la ipersuperfieie V_{2r}. Di questa superficie intersezione di V_3 e V_{2r} farà parte pure la rigata V_2^{2n} perchè per ogni punto P di V_1 la retta PP' generatrice della V_2^{2n} uscente da P appartiene sia al piano generatore della V_3 uscente da P, sia all' S_r generatore della V_{2r} uscente da P. Si ha perciò:

I) *La* V_3^{n+m} *e la* V_{2r}^{2q} *determinate in* S_{2r+1} *da una curva* V_1^n *e da un fascio di ipersuperficie* (V^q_{r-1}) *assegnata in* S_r, *si intersecano in una superficie* $\bar{V}_2$ *di cui fa parte la* V_2^{2n} *rigata appartenente alla* V_3^{n+m} *e i piani generatori della* V_3 *uscenti dai punti di* V_1^n *costituenti il gruppo jacobiano della serie lineare* g^1_N *secata su* V_1 *dal fascio* (V^q_{r-1}). *Gli* ∞^1 *gruppi della* g^1_N *determinano nella* V_2^{2n} ∞^1 *gruppi di* N *rette ciascuno. In corrispondenza agli* j *punti del gruppo jacobiano si hanno nella* V_2^{2n}, j *generatrici appoggiate alla* V'_1 *omologa della* V_1 *nella proiettività* w *nei punti in cui la* V_2^{2n} *ha per piani tangenti i piani generatori della* V_3 *suddetti.*

Si osservi ora che se X è un punto della V_1^n e XX'Y' il piano generatore della V_3^{n+m} determinato da X, la retta X'Y' in S'_r descriverà, al variare di X in V_1, la superficie, di ordine m, costituita dalle tangenti alla curva V'_1 omologa della V_1 nella proiettività w, tale superficie $V'_2{}^m$ (che nel caso $r = 2$ si spezza nel piano S'_2 contato m volte) fa pure parte della $\bar{V}_2$ perchè tutto l' S'_r fa parte della V^{2q}_{2r} con la multiplicità $2q - 1$ (n° 7) e quindi la V'_2 farà parte della $\bar{V}_2$ contata $2q - 1$ volte. Dovendo essere l' ordine della $\bar{V}_2$ eguale a $2q\,(n + m)$ dovrà essere

$$2n + j + (2q - 1)\,m = 2q\,(n+m) \tag{27}$$

e quindi è

$$j = 2n\,(q-1) + m \tag{28}$$

II) *La* (28) *dà il numero dei punti, fuori degli eventuali punti multipli della* V_1^n, *del gruppo jacobiano della serie lineare* g^1_N *secata su* V_1^n *dal fascio di ipersuperficie* (V^q_{r-1}) *di* S_r, *ed il numero dei piani della congruenza* H_{3r-1} *comuni alla* V_3^{n+m} *e alla* V^{2q}_{2r} *determinata in* S_{2r+}, *dalla* V_1 *e dal fascio* (V_{r-1}).

Si noti che per $q = 1$, risulta $j = m$; il fascio (V^q_{r-1}) è un fascio di iperpiani; detro S_{r-2} il suo centro, per cui passano m iperpiani tangenti alla V_1^n, di classe m; la V^{2q}_{2r} è un ipercono V^2_{2r} con il vertice nell' S_{2r-3} congiungente l' S_{r-2} con l' $S'_{r\ 2}$ omologo suo omologo per la w. La superficie V_2, di ordine $2\,(n + m)$ sarà costituita da V_2^{2n}, da V'^m_2 e da m piani generatori della V_3^{n+m}, rispondenti agli $j = m$ E_1 del gruppo jacobiano della serie secata sulla V_1 dal fascio di iperpiani.

Si noti esplicitamente che:

III) *La superficie* V_2, *di ordine* 2q (n + m), *intersezione delle varietà* V_3^{n+m} *e* V^{2q}_{2r} *determinate nell'* S_{2r+1} *da una curva* V_1, *di ordiue* n *e classe* m, *e da un fascio di ipersuperficie* $(V_{r\ 2})$ *di ordine* q, *dell'* S_r, *si spezza nella rigata* V_2^{n2}, *costituita dalle rette* XX', *con* X *variabile in* V_1 *e* X' *suo omologo nella proiettività* w; *nella rigata* V'_2 *contata* 2q − 1 *volte, costituita dalle tangenti alla curva* V'_1 *descritta in* S'_r *da* X'; *e in* j *piani, della congruenza* $H_{2r\ 1}$, *tangenti alla rigata* V_2^{2n} *in* j *punti della sua direttrice* V'_1, *omologhi per la* w *dei punti del gruppo jacobiano della serie lineare* g^1_N *secata sulla* V_1 *dal fascio di ipersuperficie* $(V_{r\ 1})$, *fuori dagli eventuali punti multipli della* V_1.

INDICE

1. Introduzione sintetica della congruenza H_{2r} di rette dell' S_{2r+1} prima rappresentazione complessa dell' S_r biduale.
2. Rappresentazione degli $\infty^{2r\ 1}$ E_1 di S_r in una congruenza $H_{2r\ 1}$ di piani, di S_{2r-1}, composta con la congruenza H_{2r}.
3. Gli E_1 di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso e le catene di punti biduali che essi determinano.
4. La $V_{2r\ 1}$ dell' S_{2r+1} determinata dalla $V_{r\ 1}$ di S_r, composta con la congruenza H_{2r-1}.
5. La V_3^{n+m} determinata dagli E_1 di uua curva c^n di ordine n e classe m, di un S_k di S_r.
6. La V_{2r-1} di S_{2r+1} determinata da una $V_{r\ 1}$ di S_r dodata di una V_{r-2} multipla.
7. La ipersuperficie di S_{2r+1} determinata da un fascio di ipersuperficie di S_r. Gl' iperconi quadrici determinati dai fasci d' iperpiani.
8. I piani della congruenza $H_{2r\ 1}$ di S_{2r+1} determinati dagli E_1 costituenti il gruppo jacobiano di una serie lineare g^1_N di una V_1 di S_r, ed i gruppi di N rette di H_r determinati dai gruppi g_N di g^1_N,

Sull' equazione del moto del polo istantaneo di rotazione rispetto al polo medio, in funzione delle coordinate del polo d' inerzia.

Nota del dott. **Elio Fichera,** *presentata dal socio* **L. Carnera**

(Adunanza del dì 7 marzo 1956)

Sunto. – Date le equazioni del moto del polo istantaneo di rotazione rispetto al polo medio, scelto come origine degli assi di riferimento, si fanno delle ipotesi sul moto del polo d' inerzia, in modo da poter integrare le equazioni precedenti.

Premessa.

Conduciamo per il polo nord medio della Terra un piano tangente, e assumendo questo punto di tangenza P come origine di un sistema cartesiano ortogonale x, y, orientiamo l' asse delle x positivamente verso Greenwich e quello delle y a 90° ad ovest.

Indichiamo con ξ, η le coordinate del polo d' inerzia P_i e con x, y, le coordinate corrispondenti del polo istantaneo di rotazione della Terra, che d' ora innanzi chiameremo semplicemente polo di rotazione.

Con Chandler supponiamo che il polo di rotazione ruoti attorno al polo d' inerzia di moto circolare uniforme.

Le equazioni di tale moto saranno dunque:

$$x - \xi = r \, sen \, (\omega t + \theta_0)$$

$$y - \eta = r \, cos \, (\omega t + \theta_0)$$

dove r indica la distanza che separa il polo d' inerzia dal polo di rotazione.

Le componenti della velocità del polo di rotazione saranno:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = \omega \, (y - \eta) \\ \dot{y} = - \, \omega \, (x - \xi) \end{cases}$$

e quelle dell' accelerazione:

$$(2) \qquad \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \, x = \omega^2 \, \xi \\ \ddot{y} + \omega^2 \, y = \omega^2 \, \eta \end{cases}$$

Se per il momento supponiamo che il polo d' inerzia coincida con la

origine delle coordinate, i secondi membri delle (2) si annullano, e rappresenteranno le equazioni del moto armonico considerato rispetto alla origine degli assi; cioè:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (3)$$
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

L'integrale generale reale delle equazioni (3) sarà del tipo:

$$x = K_1 \cos \omega t + K_2 \operatorname{sen} \omega t \qquad (4)$$
$$y = K_3 \cos \omega t + K_4 \operatorname{sen} \omega t$$

con K_i costanti reali.

Ma una equazione differenziale del secondo ordine ammette precisamente ∞^2 soluzioni, o integrali particolari, ossia l'integrale generale di tale equazione dipende da due costanti arbitrarie.

Nel caso di un equazione del tipo:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (4')$$

essa lega l'accelerazione $\ddot{x}$ e l'ascissa x del punto, *qualunque sia* l'ampiezza r e la fase iniziale θ_0 del moto armonico considerato; cioè in altre parole la funzione di t:

$$x = r \cos (\omega t + \theta_0) \qquad (4'')$$

soddisfa, comunque si scelgano le costanti r, θ_0, alla equazione di cui sopra. che definisce tutti i moti armonici di dato periodo $2\pi/\omega$.

Concludendo si può dire che la (4'') fornisce l'integrale generale della (4'), ed r, θ_0 sono le rispettive costanti arbitrarie, per cui le K_i sono legate fra loro, essendo funzioni di r, θ_0.

Dalle equazioni, ottenute sempre per $\xi = \eta = 0$:

$$x = r \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0)$$
$$y = r \cos (\omega t + \theta_0)$$

si ottiene sviluppando:

$$x = [r \operatorname{sen} \theta_0] \cos \omega t + [r \cos \theta_0] \operatorname{sen} \omega t$$
$$y = [r \cos \theta_0] \cos \omega t + [-r \operatorname{sen} \theta_0] \operatorname{sen} \omega t$$

che confrontate con le (4) danno:

$$K_1 = -K_4 = K$$
$$K_2 = K_3 = h \qquad (5)$$

In tal modo si hanno due sole costanti.

Tutto questo ragionamento è valido nel caso che il polo d' inerzia coincida con l' origine degli assi e che il moto del polo di rotazione attorno al polo d' inerzia sia uniforme, nel caso però che il secondo membro delle (2) sia diverso da zero (sia perchè il polo d' inerzia non coincide con l' origine degli assi, sia perchè la velocità angolare del polo di rotazione non è costante, sia perchè il polo d' inerzia è dotato di un movimento proprio) le equazioni (4) con le posizioni (5), cioè:

$$x = K \cos \omega t + h \operatorname{sen} \omega t$$
$$y = h \cos \omega t - K \operatorname{sen} \omega t \qquad (6)$$

restano della stessa forma, solo che i fattori K, h non sono più costanti ma funzioni variabili che ammettono derivate — almeno sino al secondo ordine — diverse da zero.

Per ora facciamo la sola ipotesi che ω sia costante.

Derivando le (6) rispetto al tempo si avrà:

$$\dot{K} \cos \omega t + \dot{h} \operatorname{sen} \omega t = -\omega \eta$$
$$\dot{h} \cos \omega t - \dot{K} \operatorname{sen} \omega t = \omega \xi$$

Moltiplicando la prima per $\cos \omega t$, la seconda per $-\operatorname{sen} \omega t$ e sommando; poi la prima per $\operatorname{sen} \omega t$, la seconda per $\cos \omega t$ e sommando, si otterranno le espressioni di $\dot{K}$, $\dot{h}$, che integrate forniscono:

$$K = -\omega \int (\xi \operatorname{sen} \omega t + \eta \cos \omega t \; dt + c_1$$

$$h = \omega \int (\xi \cos \omega t - \eta \operatorname{sen} \omega t) \, dt + c_2$$

Sostituendo questi valori nelle (6), definendo l' intervallo d' integrazione da 0 a t, ponendo rispettivamente $c_1 = x_0$, $c_2 = y_0$, si ottengono:

$$x = \left\{ x_0 - \omega \int_0^t (\xi \operatorname{sen} \omega t + \eta \cos \omega t) \, dt \right\} \cos \omega t +$$
$$+ \left\{ y_0 + \omega \int_0^t (\xi \cos \omega t - \eta \operatorname{sen} \omega t) \, dt \right\} \operatorname{sen} \omega t \qquad (7)$$

$$(7) \qquad y = \left\{ y_0 + \omega \int_0^t (\xi \cos \omega t - \eta \operatorname{sen} \omega t)\, dt \right\} \cos \omega t -$$

$$- \left\{ x_0 - \omega \int_0^t (\xi \operatorname{sen} \omega t + \eta \cos \omega t)\, dt \right\} \operatorname{sen} \omega t$$

che rappresentano le equazioni del moto — rispetto all' origine degli assi x, y — del polo di rotazione.

Dal punto di vista cinematico le (7) dicono che il polo di rotazione ruota attorno all' origine delle coordinate con velocitè angolare ω costante ma con ampiezza e fase variabili.

Il problema che ci proponiamo di discutere è il seguente: date le equazioni (7) del moto del polo di rotazione rispetto al polo medio — assunto come origine degli assi x, y — in funzione delle coordinate ξ, η del polo di inerzia, stabilendo la funzione che lega le coordinate ξ, η al tempo t, cerchiamo di ottenere la loro integrazione, che ci darà qualche nozione sul movimento del polo di rotazione.

In particolare supporremo che il polo d' inerzia — rispetto al polo medio — sia soggetto ad un moto:

1°) rettilineo ed uniforme,
2°) smorzato con smorzamento proporzionale alla velocità,
3°) smorzato con smorzamento proporzionale al quadrato della velocità,
4°) oscillatorio circolare nell' unità di tempo,
5°) oscillatorio ellittico con velocità angolare diversa da ω.

PRIMA IPOTESI: *Il polo d' inerzia si muove di moto rettilineo ed uniforme.*

In questo caso si dovrà avere:

$$\dot{\xi} = a \qquad \dot{\eta} = b$$

dove a, b sono due costanti; le coordinate del polo d' inerzia saranno quindi date da:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + at \\ \eta &= \eta_0 + bt \end{aligned}$$

Sostituiamo le (8) nelle (7)

$$x = \left\{ x_0 - \omega \int_0^t [(\xi_0 + at) \operatorname{sen} \omega t + (\eta_0 + bt) \cos \omega t]\, dt \right\} \cos \omega t +$$

$$+ \left\{ y_0 + \omega \int_0^t [(\xi_0 + at) \cos \omega t - (\eta_0 + bt) \operatorname{sen} \omega t]\, dt \right\} \operatorname{sen} \omega t$$

$$y = \left\{ y_0 + \omega \int_0^t [\,(\xi_0 + at)\cos \omega t - (\eta_0 + bt)\,\mathrm{sen}\,\omega t]\, dt \right\} \cos \omega t -$$

$$- \left\{ x_0 - \omega \int_0^t [\,(\xi_0 + at)\,\mathrm{sen}\,\omega t + (\eta_0 + bt)\cos \omega t\,]\, dt \right\} \mathrm{sen}\,\omega t$$

Risolvendo si otterrà in definitiva:

$$x = \xi_0 + at - \frac{b}{\omega} + \left(x_0 - \xi_0 + \frac{b}{\omega} \right) \cos \omega t + \left(y_0 - \eta_0 - \frac{a}{\omega} \right) \mathrm{sen}\,\omega t$$

$$y = \eta_0 + bt + \frac{a}{\omega} + \left(y_0 - \eta_0 - \frac{a}{\omega} \right) \cos \omega t - \left(x_0 - \xi_0 + \frac{b}{\omega} \right) \mathrm{sen}\,\omega t$$

Ponendo:

$$(9) \qquad x_0 - \xi_0 + \frac{b}{\omega} = r\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = K$$

$$y_0 - \eta_0 - \frac{a}{\omega} = r\cos\theta_0 = h$$

si ottengono infine le equazioni:

$$(10) \qquad x = \xi_0 + at - \frac{b}{\omega} + r\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_0)$$

$$y = \eta_0 + bt + \frac{a}{\omega} + r\cos(\omega t + \theta_0)$$

che rappresentano l' integrazione delle (7) nell' ipotesi che il polo d'inerzia si muova di moto rettilineo uniforme.

Si noti che ponendo $t = 0$ nelle (10) — e quindi $x = x_0$, $y = y_0$ — si otterranno ancora le (9).

In tal modo si sono determinati i parametri K, h, che in questo caso dipendono sia dalla posizione del polo di rotazione all' istante iniziale, cioè per $t = 0$, sia dalla velocità angolare ω del moto di rotazione attorno al polo d' inerzia.

Supponiamo che al tempo $t = 0$ sarà:

$$\xi_0 = 0 \quad ; \quad \eta_0 = 0$$

cioè che il moto del polo d' inerzia inizi dalla posizione in cui si trova il polo medio. Orientando l' asse delle y — con opportuna rotazione — nella direzione del moto del polo d' inerzia, si avrà:

$$a = 0 \quad ; \quad b \neq 0$$

In tale ipotesi le (10) si ridurranno a:

$$x = -\frac{b}{\omega} + r\ sen\ (\omega t + \theta_o)$$

$$y = \quad bt + r\ cos\ (\omega t + \theta_o)$$

e le espressioni (9) diverranno:

$$K = r\ sen\ \theta_o = x_o + \frac{b}{\omega}$$

$$h = r\ cos\ \theta_o = y_o$$

Ammettiamo ancora che sia il polo d' inerzia che il polo di rotazione inizino il loro moto dalla posizione occupata dal polo medio; cioè che al tempo $t = 0$ il polo d' inerzia, il polo di rotazione e il polo medio coincidano, e quindi si dovrà avere:

$$x_o = y_o = \xi_o = \eta_o = 0$$

allora le (9) diverranno:

$$r\ sen\ \theta_o = \frac{b}{\omega}$$

$$r\ cos\ \theta_o = 0$$

sistema che per $r \neq 0$, ammette le soluzioni uniche:

$$r = \frac{b}{\omega} \quad ; \quad \theta_o = 90^\circ$$

Le equazioni (10) assumeranno in conseguenza la forma:

$$x = \frac{b}{\omega}(cos\ \omega t - 1)$$

$$y = \frac{b}{\omega}(\omega t - sen\ \omega t)$$

cioè il polo di rotazione ruota, senza strisciare, sulla retta tracciata dal polo d' inerzia, appartenendo ad un cerchio di raggio $\frac{b}{\omega}$.

Dato che $x_o = 0$, l' orbita del polo di rotazione è quindi una cicloide che con le sue punte si colloca sopra l' orbita — una retta — del polo di inerzia.

La condizioni che tutte e due le coordinate iniziali del polo di rotazione siano nulle non è restrittiva, basta in generale che solo una di esse si annulli per $t = 0$.

Dimostriamo solamente per $x_o \neq 0$, $y_o = 0$; allora se $x_o > 0$ si hanno

delle cicloidi intrecciate, la cui area comune aumenta con l'aumentare del valore di x_0.

Infatti per le posizioni fatte si avrà:

$$r \, sen \, \theta_0 = x_0 + \frac{b}{\omega}$$

$$r \, cos \, \theta_0 = 0$$

da cui:

$$r = x_0 + \frac{b}{\omega}$$

che dimostra quanto si è asserito.

Per $x_0 < 0$ si hanno delle cicloidi raddrizzate, sino a che x_0 assume il valore:

$$x_0 = -\frac{b}{\omega}$$

che annulla r, per cui le (10) diverranno:

$$x = -\frac{b}{\omega}$$

$$y = bt$$

Quindi rimanendo x costante per qualsiasi valore di $t \neq t_0$ e y variabile con t, si deduce che il polo di rotazione si muove in linea retta, avendo sempre a destra la traettoria del polo d'inerzia.

Per $x_0 < -\frac{b}{\omega}$, si hanno ancora delle cicloide sfasate fra loro.

Lo stesso dicasi se $x_0 = 0 \;:\; y_0 \neq 0$.

Per uniformità di discussione dovevamo fare prima l'ipotesi del polo d'inerzia in quiete, ma si è trascurata in quanto il risultato a cui si giunge è insito nella premessa.

SECONDA IPOTESI: Il polo d'inerzia si muove di moto rettilineo smorzato con smorzamento proporzionale alla velocità.

Supponiamo che per $t = 0$, la posizione del polo d'inerzia coincida con il polo medio, per cui:

$$\xi_0 = \eta_0 = 0$$

e che il moto del polo d'inerzia, essendo rettilineo avvenga lungo l'asse delle y, e quindi in ogni istante si avrà:

$$\xi = 0$$

Se questo moto rettilineo è smorzato, con uno smorzamento proporzionale alla velocità, esso sarà condizionato da una equazione del tipo:

$$\ddot{\eta} = -\beta\,\dot{\eta}$$

dove β è il fattore di proporzionalità.

Integrando l' equazione precedente si ottiene:

$$\dot{\eta} = e^{c_1 - \beta t}$$

e supponendo che la velocità iniziale del polo d' inerzia sia:

$$\dot{\eta}_o = b$$

si avrà per successiva integrazione:

$$\xi = 0 \qquad (11)$$

$$\eta = \frac{b}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

che rappresentano le coordinate, in funzione del tempo, del polo d'inerzia sottoposto al moto ammesso in ipotesi.

Sostituendo nelle (7) le (11) si avrà:

$$x = \left[x_o - \omega \int_o^t \frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\, cos\ \omega l\ dl \right] cos\ \omega t +$$

$$+ \left[y_o + \omega \int_o^t -\frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\, sen\ \omega t\ dt \right] sen\ \omega t$$

$$y = \left[y_o + \omega \int_o^t -\frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\, sen\ \omega t\ dt \right] cos\ \omega t -$$

$$- \left[x_o - \omega \int_o^t \frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\, cos\ \omega t\ dt \right) sen\ \omega t$$

ed essendo:

$$\int_o^t e^{-\beta t}\, cos\ \omega t\, dl = \frac{\omega e^{-\beta t}\, sen\ \omega l - \beta\ e^{-\beta t}\, cos\ \omega l + \beta}{\omega^2 + \beta^2}$$

$$\int_o^t e^{-\beta t}\, sen\ \omega t\ dl = \frac{-\omega\ e^{-\beta t}\, cos\ \omega l - \beta\ e^{-\beta t}\, sen\ \omega l + \omega}{\omega^2 + \beta^2}$$

infine si otterrà:

$$x = -\frac{\omega\ b}{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t} + \left(x_o + \frac{\omega\ b}{\omega^2 + \beta^2} \right) cos\ \omega t + \left(y_o - \frac{b\ \beta}{\omega^2 + \beta^2} \right) sen\ \omega l$$

$$y = \frac{b}{\beta}\left(1 - \frac{\omega^2 e^{-\beta t}}{\omega^2+\beta^2}\right) + \left(y_o - \frac{b\ \beta}{\omega^2+\beta^2}\right) cos\ \omega t - \left(x_o + \frac{\omega\ b}{\omega^2+\beta}\right) sen\ \omega t$$

ponendo:

$$x_o + \frac{\omega\ b}{\omega^2+\beta^2} = r\ sen\ \theta_o = K$$

$$y_o - \frac{b\ \beta}{\omega^2+\beta^2} = r\ cos\ \theta_o = h$$

si avrà in definitiva:

$$x = -\frac{\omega\ b}{\omega^2+\beta^2} e^{-\beta t} + r\ sen\ (\omega t + \theta_o)$$

$$y = \frac{b}{\beta}\left(1 - \frac{\omega^2\ e^{-\beta t}}{\omega^2+\beta^2}\right) + r\ cos\ (\omega t + \theta_o)$$

Anche qui i parametri K, h dipendono oltre che dalla posizione iniziale del polo d' inerzia anche dalla velocità angolare ω con cui il polo istantaneo ruota attorno al polo d' inerzia.

Il moto che ne risulta è quindi la somma di un moto armonico x_2 e di un moto x_1 che segue una legge esponenziale del tipo:

$$x_1 = -\frac{\omega\ b}{\omega^2+\beta^2} e^{-\beta t}$$

$$y_1 = \frac{b}{\beta}\left(1 - \frac{\omega^2\ e^{-\beta t}}{\omega^2+\beta^2}\right)$$

Chiamando oscillazione libera il solo moto del polo di rotazione attorno al polo d' inerzia e oscillazione forzata il moto a cui è sottoposto il polo di rotazione per lo spostamento — ammesso in ipotesi — del polo di inerzia, si può concludere che quando il polo d' inerzia si muove rispetto al polo medio di moto rettilineo smorzato, con uno smorzamento proporzionale alla velocità, il polo di rotazione compie una oscillazione libera, i cui parametri K, h (essendo ω costante) sono costanti, e una oscillazione forzata, retta da una legge esponenziale, con una traettoria asintotica alla retta percorsa dal polo d' inerzia (coincidente per ipotesi all' asse delle y), incontrandola dopo un tempo infinitamente lungo, avendosi:

$$\lim_{t \to \infty} x_1 = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} y_1 = \frac{b}{\beta}$$

TERZA IPOTESI: Il moto del polo d'inerzia è rettilineo smorzato, con smorzamento proporzionale al quadrato della velocità.

Mantenendo sempre l'ipotesi che il moto del polo d'inerzia si svolge lungo l'asse delle y, le equazioni di tale moto, nell'ipotesi fatta saranno:

$$\ddot{\eta} = -\beta\,\dot{\eta}^2$$

$$\dot{\eta}_o = b$$

Integrando per due volte la prima e tenendo conto della seconda, si otterrà la legge che lega le coordinate del polo d'inerzia al tempo t:

$$\xi = 0$$

$$\eta = \frac{1}{\beta}\, lg_e\,(1 + \beta b t)$$

Sviluppando in serie di Mac-Laurin, si avrà;

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,\beta^{n-1}\,b^n\,t^n$$

Per la validità di questo sviluppo dobbiamo supporre che:

$$-1 < \beta b t < 1$$

e allora, poichè, comunque si prenda un numero positivo σ, si potrà sempre trovare un indice tale che sia:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{m} f_h\,(t) \right| < \sigma$$

per ogni $m > n$ e per ogni t compreso in un intervallo dato, la funzione precedente è integrabile per serie.

Sostituendo i valori di ξ, η nelle (7) si avrà:

$$x = \left\{ x_o - \omega \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,\beta^{n-1}\,b^n\,C_n \right\} cos\ \omega t +$$

$$+ \left\{ y_o - \omega \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,\beta^{n-1}\,b^n\,S_n \right\} sen\ \omega t$$

$$y = \left\{ y_o - \omega \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,\beta^{n-1}\,b^n\,S_n \right\} cos\ \omega t -$$

$$- \left\{ x_o - \omega \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \beta^{n-1} b_n C_n \right\} sen\ \omega t$$

dove:

$$C_n = \int_o^t t^n\ cos\ \omega t\ dt = \frac{1}{\omega} t^n\ sen\ \omega t + \frac{n}{\omega^2} t^{n-1}\ cos\ \omega t -$$

$$- \frac{n(n-1)}{\omega^3} t^{n-2}\ sen\ \omega t - \frac{n(n-1)(n-2)}{\omega^3} t^{n-3}\ cos\ \omega t + \ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = \int_o^t t^n\ sen\ \omega t\ dt = - \frac{1}{\omega} t^n\ cos\ \omega t + \frac{n}{\omega^2} t^{n-1}\ sen\ \omega t +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{\omega^3} t^{n-2}\ cos\ \omega t - \frac{n(n-1)(n-2)}{\omega^3} t^{n-3}\ sen\ \omega t - \ldots\ldots\ldots$$

Risolvendo si otterrà in definitiva:

$$x = \varphi\ (t) + r\ sen\ (\omega t + \theta_o)$$

$$y = \psi\ (t) + r\ cos\ (\omega t + \theta_o)$$

dove si è posto:

$$x_o = r\ sen\ \theta_o$$

$$y_o = r\ cos\ \theta_o$$

$$\varphi\ (t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^{n-1} b^n}{n} \left(\frac{n}{\omega} t^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{\omega^2} t^{n-3} + \ldots\ldots \right)$$

$$\psi\ (t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\beta^{n-1} b^n}{n} \left(t^n - \frac{n(n-1)}{\omega^2} t^{n-2} + \ldots\ldots\ldots \right)$$

Ammettendo che le $\varphi\ (t)$ e $\psi\ (t)$ appartengono alla oscillazione forzata, i parametri della oscillazione libera sono costanti, dipendendo esclusivamente dalla posizione iniziale del polo di rotazione.

QUARTA IPOTESI: Il polo d'inerzia compie una oscillazione circolare nell'unità di tempo.

Scegliendo opportunamente gli assi avremo:

$$\xi = n\ sen\ 2\pi t \qquad ; \qquad \eta = n\ cos\ 2\pi t$$

che sostituite nelle (7) daranno:

$$x = \{ x_o - \omega \int_o^t (n \operatorname{sen} 2\pi t \operatorname{sen} \omega t + n \cos 2\pi t \cos \omega t) dt \} \cos \omega t +$$

$$+ \{ y_o + \omega \int_o^t (n \operatorname{sen} 2\pi t \cos \omega \quad n \cos 2\pi t \operatorname{sen} \omega t) d \} \operatorname{sen} \omega t$$

$$y = \{ y_o + \omega \int_o^t (n \operatorname{sen} 2\pi t \cos \omega t - n \cos 2\pi t \operatorname{sen} \omega t) dt \} \cos \omega t -$$

$$- \{ x_o \quad \omega \int_o^t (n \operatorname{sen} 2\pi t \operatorname{sen} \omega t + n \cos 2\pi t \cos \omega t) dt \} \operatorname{sen} \omega t$$

Avendosi:

$$\int_o^t \operatorname{sen} 2\pi t \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{\operatorname{sen} (2\pi - \omega)t}{2(2\pi - \omega)} - \frac{\operatorname{sen} (2\pi + \omega)t}{2(2\pi + \omega)}$$

$$\int_o^t \cos 2\pi t \cos \omega t \, dt = \frac{\operatorname{sen} (2\pi - \omega)t}{2(2\pi - \omega)t} + \frac{\operatorname{sen} (2\pi + \omega)t}{2(2\pi + \omega)}$$

$$\int_o^t \operatorname{sen} 2\pi t \cos \omega t \, dt = \frac{2\pi}{4\pi^2 - \omega^2} - \frac{\cos (2\pi + \omega)t}{2(2\pi + \omega)} - \frac{\cos (2\pi - \omega)t}{2(2\pi - \omega)}$$

$$\int_o^t \cos 2\pi t \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{\cos (2\pi - \omega)t}{2(2\pi - \omega)} - \frac{\cos (2\pi + \omega)t}{2(2\pi + \omega)} - \frac{\omega}{4\pi^2 - \omega^2}$$

si otterrà infine:

$$x = - \frac{\omega}{2\pi - \omega} n \operatorname{sen} 2\pi t + r \operatorname{sen} (\omega t + \theta_o)$$

$$y = \frac{\omega}{2\pi - \omega} n \cos 2\pi t + r \cos (\omega t + \theta_o)$$

dove si è posto:

$$r \operatorname{sen} \theta_o = x_o$$

$$r \cos \theta_o = y_o + \frac{\omega n}{2\pi - \omega}$$

Da ciò si deduce che anche in questo caso i parametri dell' oscillazione libera sono costanti.

L' oscillazione forzata risulta dello stesso tipo di quella a cui è sottoposto, per ipotesi, il polo d' inerzia, concentrica con l' orbita di questo ultimo, ma con una ampiezza ingrandita del rapporto:

$$\frac{\omega}{2\pi - \omega}$$

e di senso opposto.

Nel caso in cui $x = 0$, $y = -\frac{\omega\, n}{2\pi - \omega}$ (che si può compendiare nella posizione $r = 0$), il polo di rotazione giace in ogni istante t dalla parte diametralmenle opposta alla posizione occupata dal polo d' inerzia, non mostrando però alcuna traccia di oscillazione libera.

QUINTA IPOTESI: Il polo d' inerzia compie una oscillazione ellittica con una velocità angolare χ *costante ma diversa da* ω.

Le equazioni che reggeranno tale moto del polo d' inerzia saranno, in questo caso, del tipo:

$$\xi = n\ sen\ (\chi t + p)$$
$$\eta = m\ sen\ (\chi t + q)$$

Sostituendole nelle (7) si avrà:

$$x = x_o\ cos\ \omega t - \omega\, n\ cos\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + p)\ sen\ \omega t\ dt\ -$$
$$- \omega\, m\ cos\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + q)\ cos\ \omega t\ +$$
$$+\ y_o\ sen\ \omega + \omega t\, n\ sen\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + p)\ cos\ \omega t\ dt\ -$$
$$- \omega\, m\ sen\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + q)\ sen\ \omega t\ dt$$
$$y = y_o\ cos\ \omega t + \omega\, n\ cos\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + p)\ cos\ \omega t\ dt\ -$$
$$- \omega\, m\ cos\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + q)\ sen\ \omega t\ dt\ -$$
$$- x_o\ sen\ \omega t + \omega\, n\ sen\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + p)\ sen\ \omega t\ dt\ +$$
$$+ \omega\, m\ sen\ \omega t \int_o^t sen\ (\chi t + q)\ cos\ \omega t\ dt$$

che integrate forniscono:

$$x = \left\{ x_o + \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2}\ (\omega\, n\ sen\ p - \chi\, m\ cos\ q) \right\} cos\ \omega t +$$
$$+ \left\{ y_o + \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2}\ (\chi\, n\ cos\ \cdot + \omega\, m\ sen\ q) \right\} sen \omega t +$$
$$+ \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} \left[\chi\, m\ cos\ (\chi t + q) - \omega\, n\ sen\ (\chi t + p) \right]$$
$$y = \left\{ y_o + \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2}\ (\chi\, n\ cos\ p + \omega\, m\ sen\ q) \right\} cos\ \omega t -$$
$$- \left\{ x_o + \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2}\ (\omega\, n\ sen\ p - \chi\, m\ cos\ q) \right\} sen\ \omega t -$$

$$- \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} \left| \chi\, n \cos(\chi t + p) + \omega\, m \operatorname{sen}(\chi t + q) \right|$$

Ponendo al solito:

$$x_o + \frac{\omega}{\chi^2 + \omega^2} (\omega\, n \operatorname{sen} p - \chi\, m \cos q) = r \operatorname{sen} \theta_o$$

$$y_o + \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} (\chi\, n \cos p + \omega\, m \operatorname{sen} q) = r \cos \theta_o$$

si avrà in definitiva:

$$x = r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o) + \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} \left| m \chi \cos(\chi t + q) - n \omega \operatorname{sen}(\chi t + p) \right|$$

$$y = r \cos(\omega t + \theta_o) - \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} \left| \chi\, n \cos(\chi t + p) + m \omega \operatorname{sen}(\chi t + q) \right|$$

I parametri dell' oscillazione libera sono costanti, anche se il moto del polo d' inerzia si compone di un numero qualsiasi di oscillazioni.

Consideriamo ora un caso particolare, cioè: l' oscillazione del polo di inerzia, funzione sinusoidale del tempo, avviene lungo una retta e con un periodo unitario.

Scelti opportunamente gli assi, si avrà:

$$\xi = n \operatorname{sen} 2\pi t \quad ; \quad \eta = 0$$

In tal caso:

$$r \operatorname{sen} \theta_o = x_o \quad ; \quad r \cos \theta_o = y_o + \frac{2\pi n \omega}{4\pi^2 - \omega^2}$$

e quindi:

$$x = r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o) - \frac{\omega^2\, n}{4\pi^2 - \omega^2} \operatorname{sen} 2\pi t$$

$$y = r \cos(\omega t + \theta_o) - \frac{2\pi\omega\, n}{4\pi^2 - \omega^2} \cos 2\pi t$$

Consideriamo ora la sola oscillazione forzata:

$$x_2 = - \frac{\omega^2\, n}{4\pi^2 - \omega^2} \operatorname{sen} 2\pi t$$

$$y_2 = - \frac{2\pi\omega\, n}{4\pi^2 - \omega_2} \cos 2\pi t$$

da cui si deduce che essa avviene secondo un ellisse, i cui semiassi misurano:

$$a = \frac{\omega^2 n}{4\pi^2 - \omega^2} \qquad b = \frac{2\pi}{\omega} a$$

Nel caso poi che:

$$x_o = 0 \qquad y_o = - \frac{2\pi\omega n}{4\pi^2 - \omega^2}$$

il polo di rotazione compie solamente l' oscillazione forzata senza che si aggiunga l' oscillazione libera.

Se

$$x_o = y_o = 0$$

allora si avrà:

$$r \, sen \, \theta_o = 0 \qquad r \, cos \, \theta_o = \frac{2\pi\omega n}{4\pi - \omega^2}$$

e quindi:

$$x = \frac{2\pi\omega n}{4\pi^2 - \omega^2} \left(sen \, \omega t - \frac{\omega}{2\pi} \, sen \, 2\pi t \right)$$

$$y = \frac{2\pi\omega n}{4\pi^2 - \omega^2} \left(cos \, \omega t - cos \, 2\pi t \right)$$

In tale caso l' orbita del polo di rotazione incontrerà quella del polo d' inerzia nell' istante:

$$t = \frac{2\pi}{2\pi + \omega}$$

e poichè in tale istante si dovrà avere:

$$\xi = - n \, sen \, \omega'$$

il polo d' inerzia inverte il senso del moto dirigendosi verso le x negative.

CONCLUSIONE.

Tutti i casi considerati precedentemente presuppongono delle semplici leggi sul moto del polo d' inerzia e con parametri costanti.

Queste posizioni non rispondono affatto al moto complicato a cui è sottoposto in natura il polo d' inerzia e di conseguenza il polo istantaneo di rotazione.

Si sa infatti che in detto moto vi entra un periodo annuo, ma ammettendo soddisfatta pienamente questa condizione, a questo termine se ne aggiungono altri irregolari, che matematicamente si possono rappresentare con una precisione limitata, per un intervallo di tempo e principalmente con un numero finito di termini di una serie trigonometrica.

Ogni variazione anche di un solo parametro nelle formule che reggono

il moto del polo d' inerzia provoca al minimo una variazione dell' oscillazione libera, e si avrà come conseguenza che la durata del periodo di Newcomb, apparentemente nota con tanta precisione, resta in realtà basata su molte incertezze.

Basta solo notare che tutti i metodi usati per la determinazione di questo periodo si basano sull' ipotesi che l' angolo di fase θ_0 sia costante, ma se siamo costretti ad ammettere una variazione del tipo:

$$\theta = \theta_0 + \theta' t + \textit{termini periodici}$$

si ha come conseguenza che la velocità angolare ω, che abbiamo nelle dissertazioni precedenti ritenuta sempre costante, subirà un' alterazione il cui importo sarà uguale a θ'.

Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottogruppi

Nota del Dr. **Donato Greco,** *presentata dal socio* **G. Zappa**

(Adunanza del dì 5 maggio 1956)

Sunto. – Si estendono ai gruppi infiniti alcuni risultati già stabiliti dall'autore per i gruppi finiti, e si effettua una precisazione relativamente ad un precedente ragionamento dell'autore.

In una nota [1]) del 1951 ho caratterizzato i gruppi finiti che possono pensarsi come somma di quattro sottogruppi, ed in una nota del 1953 [2]) ho assegnata una caratterizzazione analoga per i gruppi finiti che possono pensarsi come somma di cinque sottogruppi con la condizione, in quest'ultimo caso, che i sottogruppi addendi abbiano, a due a due, per intersezione uno stesso sottogruppo.

Ciò costituiva una parziale estensione di un elegante teorema di G. Scorza [3]) concernente i gruppi che sono somma di tre loro sottogruppi, dico parziale in quanto il teorema dello Scorza non è legato all'ipotesi che si tratti di gruppi finiti.

La presente nota ha lo scopo di mostrare come i risultati da me stabiliti nei lavori dianzi citati restino validi qualora si prescinda dall'ipotesi della finitezza dei gruppi di cui si tratta. A ciò pervengo dimostrando che lo studio di un gruppo G che sia somma di quattro sottogruppi o quello di un gruppo G che sia somma di n sottogruppi aventi, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso può sempre ricondursi a quello relativo al caso in cui G è finito e non esiste alcun sottogruppo, diverso da quello identico, che sia normale in G e contenuto in tutti i sottogruppi addendi.

Ho colto qui l'occasione per colmare una lacuna esistente in un ragionamento fatto nel primo dei lavori testè citati ed in virtù della quale certi gruppi che possono pensarsi come somma di quattro sottogruppi

[1]) D. Greco. *I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi.* Rend. Acc. Sc Fis. e Mat della Soc. Naz. di Sc. Lett ed Arti, Napoli, s. IV, vol XVIII (1951). Nel testo indicheremo tale lavoro con (N).

[2]) D. Greco *Su alcuni gruppi finiti che sono somma di cinque sottogruppi* Rend Sem. Mat. di Padova, (1953). Nel testo indicheremo tale lavoro con (N').

[3]) G. Scorza. *I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi.* Boll. U. M. I. vol. 5, 1926, pp. 216-218.

sembrano non rientrare nel teorema ivi stabilito. Ho qui caratterizzato tali gruppi ed ho altresì dimostrato che essi sono suscettibili di due diverse decomposizioni in somma di quattro sottogruppi. In forza dell'una decomposizione essi effettivamente non rientrano nel teorema in questione, mentre in virtù dell'altra essi vi rientrano pienamente.

1. Sia G un gruppo che possa pensarsi come somma di quattro sottogruppi:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \tag{1}$$

tre dei quali non lo esauriscano. Allora i quattro sottogruppi G_i hanno [4]), a tre a tre, per intersezione un sottogruppo fisso:

$$G_i \cap G_j \cap G_k = J \qquad (i \neq j \neq k)$$

ed inoltre abbiamo dimostrato in (N) che, detta (p, q, r, s) una permutazione degli indici, se riesce:

$$G_p \cap G_q \supset J\ , \tag{2}$$

si ha pure:

$$G_r \cap G_s \equiv J\ , \tag{3}$$

sicchè dei sei sottogruppi $G_i \cap G_j$ almeno tre coincidono in J.

Dico che:

I. *L'intersezione comune* J *ha indice finito in* G *ed inoltre esiste un sottogruppo* N, *di indice finito, normale in* G *e contenuto in tutti i* G_i.

Invero, sia g_2 un elemento di G_2 esterno a G_1 a G_3 ed a G_4. Detto g_1 un elemento di G_1, il prodotto $g_1 g_2$ non può essere in G_1, altrimenti si avrebbe anche $g_1^{-1}(g_1 g_2) = g_2 \in G_1$, contro l'ipotesi. Allora gli elementi di G_1 possono suddividersi in tre classi, non necessariamente disgiunte, come segue:

a) elementi $g_1 \in G_1$, tali che $g_1 g_2 \in G_2$. Sono tutti e soli gli elementi di $G_1 \cap G_2$.

b) elementi $g_1 \in G_1$, tali che $g_1 g_2 \in G_3$.

c) elementi $g_1 \in G_1$, tali che $g_1 g_2 \in G_4$.

Se g_1 e g_1' sono due elementi del tipo b), si ha $g_1' g_2 (g_1 g_2)^{-1} =$

[4]) Cfr. G. Zappa. *Sulla relazione tra il rango ed il tipo di un gruppo* Rend. Acc. Italia, Classe di Sc. Fis. Mat. e Nat., s. VII, vol. II (1941).

$g_1' g_1^{-1} \in G_3$, cioè $g_1' g_1^{-1} \in G_1 \cap G_3$, sicchè g_1' e g_1 appartengono ad uno stesso laterale di $G_1 \cap G_3$. Analogamente gli elementi della categoria c) sono tutti in uno stesso laterale di $G_1 \cap G_4$.

Si ha dunque:

$$G_1 = G_1 \cap G_2 + (G_1 \cap G_3)\, g + (G_1 \cap G_4)\, \gamma \tag{4}$$

ove g e γ sono opportuni elementi di G_1.

Si noti che g è un elemento della categoria b), quindi non è in G_3, poichè se fosse $g \in G_3$, essendo anche $g\, g_2 \in G_3$, si avrebbe $g_2 \in G_3$, contro l'ipotesi. Analogamente γ non è in G_4.

Ne segue che nessun elemento di $(G_1 \cap G_3)\, g$ è in G_3, perchè, se un elemento di tale laterale fosse in G_3 ogni elemento del laterale stesso sarebbe in G_3 e quindi vi sarebbe anche g.

Si ha dunque dalla (4):

$$G_1 \cap G_3 = J + [(G_1 \cap G_4)\, \gamma] \cap G_3. \tag{5}$$

Se $(G_1 \cap G_4)\, \gamma$ non contiene elementi di G_3 è $G_1 \cap G_3 \equiv J$. Se invece $(G_1 \cap G_4)\, \gamma$ contiene elementi di G_3, sia h un elemento comune a $(G_1 \cap G_4)\, \gamma$ ed a G_3. Si ha allora $(G_1 \cap G_4)\, \gamma = (G_1 \cap G_4)\, h$ ed anche, ovviamente, $(G_1 \cap G_4)\, \gamma = (G_1 \cap G_3 \cap G_4)\, h = Jh$. Ne segue:

$$G_1 \cap G_3 = J + J\, h.$$

Pertanto J *o coincide con* $G_1 \cap G_3$ *od ha in esso indice* 2.

Scambiando l'ufficio di $G_1 \cap G_3$ con quello di uno qualunque dei sottogruppi $G_i \cap G_j$ $(i \neq j)$ si deduce che J ha indice non superiore a due in ognuno dei sottogruppi $G_i \cap G_j$.

Dalla (4) si deduce allora che J ha indice finito in G_1.

In modo analogo si verifica che J ha indice finito in G_2, in G_3 ed in G_4 ed allora dalla (1) segue che J ha indice finito in G.

Se allora J è normale in G la I è dimostrata. Se invece J non è normale il suo normalizzante ha indice finito in G; detto k tale indice, J possiede k sottogruppi coniugati in G: $J_1 \equiv J, J_2, \ldots, J_k$, e poichè, com'è noto, l'intersezione di un numero finito di sottogruppi d'indice finito, fra loro coniugati, ha indice finito, il sottogruppo

$$N = J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_k$$

ha indice finito in G e, ovviamente, vi è normale.

Risultando quindi $N \subset J$, la I è dimostrata.

2. Consideriamo il gruppo fattoriale G/N, di ordine finito.

In forza dell'omomorfismo che si stabilisce fra G e G/N facendo corrispondere ogni elemento di G al laterale di N cui esso appartiene, si riconosce essere :

$$G/N = G_1/N + G_2/N + G_3/N + G_4/N \tag{6}$$

e, viceversa, dalla (6) segue la (1).

Lo studio di un gruppo G che sia somma di quattro sottogruppi può dunque sempre ricondursi al caso che G è finito e non esiste alcun sottogruppo proprio che sia normale in G e contenuto in tutti i G_i.

Poniamoci dunque nell'ipotesi che G sia finito e che, verificandosi la (1), non esista alcun sottogruppo proprio che sia normale in G e contenuto in tutti i G_i. Sono allora da prendersi in considerazione i seguenti due casi :

A) *I sottogruppi* $G_i \cap G_j$ *coincidono tutti nel sottogruppo* J.

B) *Almeno uno dei sottogruppi* $G_i \cap G_j$ *contiene propriamente* J.

Poichè tale problema è stato studiato in (N), rimandando a tale lavoro per le dimostrazioni, possiamo dire che nel caso A) se J è normale e quindi, per l'ipotesi fatta, identico, il gruppo G è isomorfo ad uno dei seguenti :

α) *di ordine sei non ciclico ;*

β) *di ordine nove non ciclico ;*

se invece J non è normale G è isomorfo al gruppo

γ) *di ordine 18 avente i generatori :*

$$g_1^3 = g_2^3 = g_3^2 = 1 \ , \quad g_1 g_2 = g_2 g_1 \ , \quad g_3 g_i = g_i^2 g_3 \quad (i = 1, 2) \tag{7}$$

il quale si ottiene dal gruppo β) ampliandolo mediante un elemento di periodo 2 che ne trasformi ogni generatore nel proprio quadrato.

3. Soffermiamoci invece un po' più ampiamente sul caso B), allo scopo di correggere un'imperfezione presente nel ragionamento fatto in (N) a proposito di tale caso [5]).

Detta (p, q, r, s) una permutazione degli indici, supponiamo che sus-

[5]) L'omissione di cui si è parlato nella prefazione riguarda il ragionamento fatto in (N) a proposito del caso B). Infatti in tale ragionamento il sottogruppo J è stato considerato senz'altro normale. Il ragionamento relativo al caso in cui J non sia normale è quello del n. 4 della presente Nota.

sistano le (2) e (3). Allora, per quanto si è visto al n. 1, J ha indice 2 in $G_p \cap G_q$. Detto $g_{p,q}$ un elemento di $G_p \cap G_q$ esterno a J, g_r un elemento di G_r che non sia nè in G_p nè in G_q nè in G_s, l'elemento $g_{p,q}\, g_r$ non è nè in G_p nè in G_q nè in G_r, dunque $g_{p,q}\, g_r \in G_s$. Se g_r' è un secondo elemento di G_r avente la stessa proprietà di g_r si ha allora $g_r'\, g_r^{-1} \in G_r \cap G_s \equiv J$, cioè g_r' e g_r sono in uno stesso laterale di J. Si ha inoltre: $g_{p,q}\, g_r \in G_s$, $g_r\, g_{p.q}^{-1} \in G_s$, da cui $g_r^2 \in G_r \cap G_s \equiv J$. Dunque:

II. *Se sussistono le* (2) *e* (3) J *ha indice* 2 *in* $G_p \cap G_q$ *e inoltre gli elementi di* $G_r\,(G_s)$ *che non sono nè in* G_p *nè in* G_q *nè in* $G_s\,(G_r)$ *appartengono ad uno stesso laterale di* J *ed hanno il quadrato in* J.

Supponiamo allora, in primo luogo, che uno solo dei sottogruppi $G_i \cap G_j$ contenga J propriamente, e sia questo $G_1 \cap G_2$. Allora, in forza della II, J ha indice 2 in $G_1 \cap G_2$, in G_3 ed in G_4.

Se ora $g_{1,2} \in G_1 \cap G_2$, $g_3 \in G_3$ sono elementi esterni a J, si ha: $g_{1,2}^{-1}\, g_3 \in G_4$, $g_3\, g_{1,2} \in G_4$, onde l'elemento $g_{1,2}^{-1}\, g_3 g_{1,2}$ non è nè in G_1 nè in G_2 nè in G_4; dunque $g_{1,2}^{-1}\, g_3\, g_{1,2} \in G_3$, cioè $g_3\, g_{1,2} = g_{1,2}\, g_3'$, con $g_3' \in G_3$. Analogamente si prova essere $g_3\, g_{1,2} = g'_{1,2}\, g_3$ con $g'_{1,2} \in G_1 \cap G_2$. Pertanto $G_1 \cap G_2$ è permutabile con G_3 ed analogamente con G_4.

Posto allora: $\overline{G} = (G_1 \cap G_2) \cup G_3$, si ha: $\overline{G} = (G_1 \cap G_2) \cdot G_3$, e $\overline{G}$ contiene J come sottogruppo normale d'indice 4, il gruppo fattoriale $\overline{G}/J$ essendo quadrinomio. Ne segue che $\overline{G}$ è un sottogruppo proprio di G che non coincide nè con G_1 nè con G_2 (nè con G_4). Dico che $\overline{G} \supset G_4$. Invero $\overline{G} \cap G_4 \supset G_3 \cap G_4 \equiv J$ e poichè il prodotto di un elemento $g_{1,2} \in G_1 \cap G_2$ esterno a J per un elemento $g_3 \in G_3$, anch'esso esterno a J, è in G_4, $\overline{G} \cap G_4$ è un sottogruppo di G_4 che contiene J propriamente. Ma J ha indice 2 in G_4, dunque $\overline{G} \cap G_4 = G_4$. Allora per il teorema di Scorza risulta:

$$\overline{G} = G_1 \cap G_2 + G_3 + G_4.$$

Si ha poi $G = \overline{G} + G_1 + G_2$, onde, per lo stesso teorema di Scorza, G_1, G_2 e $\overline{G}$ hanno indice 2 in G, il sottogruppo $G_1 \cap G_2$ è normale in G ed il fattoriale $G/(G_1 \cap G_2)$ è un gruppo quadrinomio.

Il sottogruppo J ha allora in G indice 8 ed il gruppo G può pensarsi simultaneamente sia come somma di tre che come somma di quattro sottogruppi.

Se ora J è normale in G esso, per l'ipotesi fatta, è identico e quindi il gruppo G è un gruppo di ordine 8, non ciclico, somma di tre sotto

gruppi d'indice 2 uno dei quali è quadrinomio. I gruppi di ordine 8 siffatti sono il gruppo diedrale, ed i gruppi abeliani di tipo (2,1) ed (1,1,1).

4. Supponiamo ora che J non sia normale in G. Poichè G_1 e G_2, avendo indice 2, sono normali, nè G_3 nè G_4 sono normali e non possono essere tra loro coniugati. Allora G_3, G_4 e J hanno per normalizzante $\overline{G}$ e quindi ognuno di essi possiede due coniugati in G: G_3, G_3'; G_4, G_4'; J, J', tutti contenuti in $\overline{G}$ e si ha:

$$(G_1 \cap G_2) \cap G_3' = (G_1 \cap G_2) \cap G_4' = G_3' \cap G_4' = J'.$$

Il sottogruppo $J \cap J'$ è allora normale in G e contenuto in tutti i G_i, quindi, per l'ipotesi fatta, è identico. Ne segue che J e J' hanno ordine 2 e G è un gruppo di ordine 2^4. $\overline{G}$ è allora un gruppo di ordine 8 che contiene i sottogruppi $G_1 \cap G_2$, G_3, G_3' e, avendosi:

$$(G_1 \cap G_2) \cap G_3 = J\,; \qquad (G_1 \cap G_2) \cap G_3' = J'$$

G è un gruppo di ordine 8 i cui sottogruppi massimi hanno intersezione identica, sicchè esso è abeliano di tipo (1,1,1).

I sottogruppi $G_3 \cap G_3' = D_3$, $G_4 \cap G_4' = D_4$ sono normali in G e nessuno di essi può essere in $G_1 \cap G_2$. Posto $D_3 \cup D_4 = \Gamma'$, Γ' è normale in G ed ha indice 2 in $\overline{G}$. Posto ancora $G_1 \cap G_2 \cap \Gamma' = H$, H è normale in G ed ha indice 2 in $G_1 \cap G_2$ ed in Γ'. Il fattoriale G/H, di ordine 8, contiene i due sottogruppi $(G_1 \cap G_2)/H$ e Γ'/H, normali, di ordine 2 e contenuti in $\overline{G}/H$. Ne segue, per una nota proprietà dei *p*-gruppi, l'esistenza di un terzo sottogruppo Γ''/H di ordine 2 contenuto in $\overline{G}/H$ e normale in G/H, cioè di un sottogruppo Γ'' di G, normale, contenuto in $\overline{G}$ e contenente H.

Il gruppo fattoriale $\overline{G}/H$ è allora quadrinomio e quindi, per il teorema di Scorza, si ha: $\overline{G} = G_1 \cap G_2 + \Gamma' + \Gamma''$. Ne segue: $G = G_1 + G_2 + \Gamma' + \Gamma''$ ove i quattro sottogruppi G_1, G_2, Γ' e Γ'' si intersecano secondo il sottogruppo normale H. Poichè G_1 e G_2 hanno indice 2 e Γ' e Γ'' hanno indice 4, per quanto si è visto al principio di questo numero, il gruppo fattoriale G/H è necessariamente un gruppo di ordine 8, diedrale od abeliano di tipo (2,1) o (1,1,1).

Pertanto se J non è normale, ci si può sempre ricondurre al caso in cui esso lo sia a condizione di sostituire ai sottogruppi G_3, G_4, J i sottogruppi Γ', Γ'' ed H normali in G ed aventi, rispettivamente, gli stessi indici dei precedenti.

Il gruppo G può dunque, in tal caso, pensarsi sia come somma di quattro sottogruppi di cui due di indice 2 e due di indice 4 ed intersecantisi secondo il sottogruppo normale H di indice 8 in G, sia come somma di quattro sottogruppi aventi, rispettivamente, gli stessi indici dei precedenti ma intersecantisi secondo il sottogruppo J che non è normale in G.

Allo scopo di caratterizzare i gruppi di ordine 16 che soddisfano alla proprietà del gruppo G precedente osserviamo che siccome, per ipotesi, J non è normale, G non è abeliano sicchè il suo centro è un sottogruppo proprio di ordine quattro al più. D'altra parte G contiene tre sottogruppi normali H, D_3, D_4 di ordine due, entrambi contenuti nel sottogruppo Γ'. Ne segue che Γ', il quale non è contenuto nè in G_1 nè in G_2, è proprio il centro di G. Il gruppo aggiunto G/Γ', non potendo essere ciclico, è allora quadrinomio e pertanto il gruppo G contiene due sottogruppi massimi $\overline{G}'$, $\overline{G}''$, distinti da $\overline{G}$ e contenenti Γ'; tali sottogruppi sono allora necessariamente distinti da G_1 e da G_2.

Consideriamo allora il gruppo di Frattini Φ di G che, non essendo G abeliano, non può essere identico. Il sottogruppo Φ essendo contenuto in tutti i sottogruppi massimi è allora necessariamente di ordine 2 e pertanto G è generabile, mediante tre elementi [6]).

In conclusione G è un gruppo di ordine 16 generabile mediante tre elementi, avente il centro quadrinomio e contenente un sottogruppo di ordine 8, $\overline{G}$, abeliano di tipo (1,1,1).

Un gruppo G siffatto si costruisce senz'altro come prodotto diretto del gruppo diedrale, di generatori:

$$a^4 = c^2 = 1, \; a\,c = c\,a^3$$

per un gruppo ciclico di ordine 2, $\{ b \}$. Tale gruppo ha per centro il sottogruppo $\Gamma' = \{ a^2, b \}$ e può pensarsi, in più modi diversi, come somma di quattro sottogruppi aventi per intersezione il sottogruppo normale $\{ a^2 \}$. Esso però può pensarsi pure, ed in vari modi diversi, come somma di quattro sottogruppi aventi per intersezione un sottogruppo di ordine 2 non normale in G. Ad es. si ha:

$$G = \{ a, c \} + \{ ab, c \} + \{ b, c \} + \{ a^2 b, c \}$$

ove i primi due sottogruppi hanno indice 2 ed i rimanenti indice 4.

Di gruppi di ordine 16 generabili mediante tre elementi ed a centro

---

[6]) Cfr. G. Scorza. *Gruppi astratti*. Ed. Cremonese, Roma 1942, pag. 187.

quadrinomio ve ne sono, oltre al precedente, ancora due; di essi uno ha le relazioni generatrici:

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1\,, \quad a\,c = c\,a\,b\,, \quad a\,b = b\,a\,, \quad b\,c = c\,b$$

e l'altro si ottiene come prodotto diretto del gruppo dei quaternioni per un gruppo ciclico di ordine 2 [7]). Nessuno di questi due gruppi contiene però un sottogruppo di ordine 8 abeliano di tipo (1,1,1) e pertanto essi sono da scartare.

5. Supponiamo ora che due dei sottogruppi $G_i \cap G_j$ contengano propriamente J. In forza delle (2) e (3) potremo supporre che sia:

$$G_1 \cap G_2 \supset J\,, \qquad G_1 \cap G_3 \supset J\,, \tag{8}$$

sicchè riuscirà:

$$G_3 \cap G_4 \equiv J\,, \quad G_2 \cap G_4 \equiv J. \tag{9}$$

Se riesce pure $G_1 \cap G_4 \equiv G_2 \cap G_3 \equiv J$, ogni elemento di G_4 che sia esterno a J è esterno a tutti i G_i con $i \neq 4$, ed ogni elemento di $G_2\,(G_3)$ che sia esterno a $G_1 \cap G_2$ $(G_1 \cap G_3)$ è esterno a tutti i G_i con $i \neq 2$ $(i \neq 3)$. Ne segue, a norma della II, che ogni elemento di G_2, di G_3 o di G_4 ha il quadrato in J sicchè J è normale in G_2, in G_3 ed in G_4. Pertanto J è normale in $G_2 \cup G_3 \cup G_4 = G$ e quindi, per le nostre ipotesi, identico. Inoltre, per la II, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \cap G_3$ e G_4 sono gruppi di ordine 2, mentre G_2 e G_3 sono gruppi quadrinomi.

Siano $g_{1,2}$ e g_4 gli elementi di ordine 2 generatori di $G_1 \cap G_2$ e di G_4, rispettivamente. L'elemento $g_{1,2}\,g_4$ è fuori di G_1, di G_2 e di G_4, quindi è in G_3 ed ha perciò quadrato identico; ne segue: $g_{1,2}\,g_4 = g_4\,g_{1,2}$. Il gruppo quadrinomio $\{g_{1,2}, g_4\} = K = (G_1 \cap G_2) \cup G_4$, che non è in alcuno dei G_i, contiene dunque G_4 e $G_1 \cap G_2$ come sottogruppi di indice 2. Ne segue:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + K \tag{10}$$

ed inoltre $K \cap G_1 \cap G_2 = G_1 \cap G_2$ è un sottogruppo di ordine 2, mentre $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = J$ è il sottogruppo identico. Ciò è assurdo in quanto se sussiste la (9) i quattro sottogruppi G_1, G_2, G_3, K devono intersecarsi, a tre a tre, secondo uno stesso sottogruppo.

Resta così provato che se sussistono le (8) e (9) non può essere $G_1 \cap G_4 = G_2 \cap G_3 = J$.

Supposto allora che sussistano le (8) e (9) dovrà essere:

$$G_2 \cap G_3 \supset J\,, \qquad G_1 \cap G_4 = J \tag{11}$$

---

[7]) Cfr. W. Burnside. *Theory of groups of finite order,* Dover Publ. Inc., 1955, pag. 145-146.

oppure:

$$(12) \qquad G_1 \cap G_4 \supset J\ , \qquad G_2 \cap G_3 = J.$$

Se si verificano le (8), (9) e (11), ragionando come dianzi si riconosce che J ha indice 2 in G_4 e nei sottogruppi $G_1 \cap G_2$, $G_1 \cap G_3$, nonchè indice 4 in G_1, in G_2 ed in G_3 e che ogni elemento di G_1, di G_2 e di G_3 ha il quadrato in J. Ne segue che J è normale in G, cioè identico, ed il gruppo $G = G_i \times G_4$ (i, = 1, 2, 3) è il gruppo abeliano di ordine 8 e tipo (1, 1, 1).

Poniamo allora $(G_1 \cap G_2) \cup G_4 = H$. H è un sottogruppo di ordine 4 di G che contiene, oltre i sottogruppi G_4 e $G_1 \cap G_2$, di ordine 2, un terzo sottogruppo di ordine 2, Γ, e si ha: $H = G_4 + G_1 \cap G_2 + \Gamma$. Poichè H è un sottogruppo d'indice 2 in G e Γ un sottogruppo d'indice 4 si ha: $G = G_1 + G_2 + H$, e quindi: $G = G_1 + G_2 + \Gamma + G_4$. Pertanto, salvo a sostituire G_3 con un ulteriore sottogruppo Γ, avente lo stesso indice, il caso in cui si verificano le (8), (9) ed (11), si riconduce a quello in cui uno solo dei sottogruppi $G_i \cap G_j$ contiene propriamente J.

Mostriamo infine che è senz'altro da escludersi il verificarsi simultaneo delle (8), (9) e (12). Invero consideriamo la relazione (4) nella quale, come si è visto, g è un elemento di G_1 esterno a G_3 e γ è un elemento di G_1 esterno a G_4. Poichè dalla (4) si trae la (5) nonchè l'altra:

$$G_1 \cap G_4 = J + [(G_1 \cap G_3)\, g] \cap G_4\ ,$$

l'essere $G_1 \cap G_3 \supset J$ e $G_1 \cap G_4 \supset J$ implica che i sistemi $(G_1 \cap G_4)\,\gamma$ e G_3 abbiano almeno un elemento h in comune e che, analogamente, i sistemi $(G_1 \cap G_3)\, g$ e G_4 abbiano in comune almeno un elemento k. Ne segue, come al n. 1:

$$(G_1 \cap G_3)\, g = J\, h\ , \qquad (G_1 \cap G_4)\, \gamma = J\, k$$

onde dalla (4) stessa si trae:

$$G_1 = G_1 \cap G_2 + J\, h + J\, k$$

sicchè J, avendo indice 2 in $G_1 \cap G_2$, ha indice 4 in G_1. Inoltre J contiene il quadrato di ogni elemento di G_2, di G_3 e di G_4 ed ha indice 4 in ognuno di tali sottogruppi, sicchè esso è normale in G e quindi, per l'ipotesi, identico.

Pertanto il sottogruppo G_1 contiene il quadrato di ogni elemento di G, quindi è normale in G e poichè si ha, ovviamente, $G_1 \cup G_2 = G$ e $G_1 \cap G_2$ ha in G_2 indice 2, G_1 ha indice 2 in G.

Il gruppo $G = G/J$ è allora un gruppo di ordine 8. Esso contiene i

sottogruppi massimi G_2 e G_3 i quali hanno intersezione identica. Ciò è assurdo e quindi resta provato che non possono sussistere le (8), (9) e (12).

6. Le considerazioni del n. 1, per quanto visto ai nn. 3, 4, 5, permettono quindi, anche prescindendo dall'ipotesi di finitezza del gruppo, di caratterizzare i gruppi che sono somma di quattro loro sottogruppi. Essi sono caratterizzati dal seguente teorema:

III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo* G *possa pensarsi come somma di quattro sottogruppi è che* G *contenga un sottogruppo normale* N *tale che il corrispondente gruppo fattoriale* G/N *sia isomorfo ad uno dei seguenti:*

α_1) *di ordine sei o nove, non ciclico;*

α_2) *di ordine 18 avente i generatori* (7);

α_3) *di ordine 8, diedrale od abeliano di tipo* (2,1) *o* (1,1,1);

α_4) *di ordine 16, prodotto diretto di un gruppo di ordine 2 per il gruppo diedrale di ordine 8.*

Nell'omomorfismo tra G *e* G/N, *ai quattro sottogruppi di cui* G *è somma corrispondono quattro sottogruppi di cui è somma* G/N.

Osserviamo che se un gruppo G è somma di quattro sottogruppi in quanto contiene un sottogruppo normale N tale che il fattoriale G/N è del tipo α_4), allora esiste in G anche un sottogruppo normale M tale che il gruppo fattoriale G/M è isomorfo al terzo dei gruppi α_3), sicchè G può pensarsi in più modi diversi come somma di quattro sottogruppi. Precisamente esso rientrerà nella categoria α_3) del teorema precedente se lo si pensa come somma di quattro sottogruppi aventi intersezione normale, nella categoria α_4) se lo si pensa come somma di quattro sottogruppi aventi per intersezione un sottogruppo non normale.

7. Mostriamo ora come anche lo studio effettuato nel lavoro (N'), cioè lo studio dei gruppi che sono somma di cinque sottogruppi intersecantisi, a due a due, secondo un sottogruppo fisso si riconduca, a prescindere dall'ipotesi iniziale che si tratti di gruppi finiti, allo studio dei gruppi finiti che hanno la stessa proprietà. Più in generale mostriamo che:

IV. *Se un gruppo* G *è somma di n sottogruppi:*

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$$

$n - 1$ *dei quali non lo esauriscano, e se tali sottogruppi hanno, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso* J *di* G, J *ha necessariamente*

indice finito in G *ed inoltre esiste in* G *un sottogruppo normale* N, *di indice finito, contenuto in tutti i* G_i *e si ha:* $G/N = \sum_{i=1}^{n} G_i/N$.

Il teorema IV è una immediata generalizzazione del teorema I.

Posto invero $G_i \cap G_j = J$ $(i \neq j = 1, 2, \ldots, n)$, come già abbiamo fatto al n. 1 diciamo g_2 un elemento di G_2 esterno a J, quindi esterno a tutti i G_i (con $i \neq 2$). Allora, detto g_1 un elemento di G_1 o si ha $g_1 g_2 \in G_2$ e quindi $g_1 \in G_1 \cap G_2 \equiv J$, oppure $g_1 g_2 \in G_i$, con $i > 2$.

Gli elementi di G_1 si suddividono allora in $n - 1$ classi come segue:

a_2) elementi $g_1 \in G_1$, tali che $g_1 g_2 \in G_2$. Sono tutti e soli gli elementi di J.

a_i) elementi $g_1 \in G_1$ tali che $g_1 g_2 \in G_i$, con i fissato > 2.

Eventualmente, per qualche i possono non esistere in G_1 elementi g_1 per cui risulti $g_1 g_2 \in G_i$, ed allora la corrispondente classe a_i) risulterà vuota. Se, la classe a_i) non essendo vuota, g_1 e g_1' sono due elementi di essa, si ha pure $g_1' g_1^{-1} \in G_i \cap G_1 \equiv J$ e g_1' e g_1 appartengono ad uno stesso laterale di J. Si può dunque dare per G_1 una decomposizione del tipo:

$$G = J + J g_1^{3} + \ldots + J g_1^{n}$$

con la convenzione che se la classe a_i), con $i > 2$, non è vuota, $g_1^{(i)}$ è un opportuno elemento di G_1 esterno a J, e quindi a tutti i G_i con $i > 1$, mentre se la classe a_i) è vuota si pone $g_1^{(i)} = 1$.

Ne segue che J ha indice finito e precisamente non superiore ad $n - 1$ in G_1. Potendo sostituirsi a G_1 uno qualunque dei sottogruppi G_i, J ha indice finito non superiore ad $(n-1)^2$, in G.

Se ne trae, ragionando come al numero 1, l'esistenza di un sottogruppo normale N, di indice finito in G e contenuto in J, ed allora il gruppo fattoriale G/N è somma degli n sottogruppi G_i/N, sicchè lo studio di un gruppo G che sia somma di n sottogruppi aventi, a due a due, una stessa intersezione, può sempre ricondursi a quello relativo al caso in cui G è finito e non esiste alcun sottogruppo normale proprio contenuto in tutti i G_i. Per $n = 5$ tale problema è stato studiato in (N') e pertanto il teorema stabilito in (N') resta valido anche a prescindere dall'ipotesi iniziale che il gruppo G sia finito.

Sui punti ipercomplessi di una ipersuperficie algebrica ordinaria dell' S_r complesso

Nota del socio **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 5 maggio 1956)

Sunto. Si inizia lo studio delle condizioni di appartenenza di un punto ipercomplesso, rappresentato da una n-pla ordinata di punti dell' S_r complesso, ad una data ipersuperficie di questo S_r. Tali condizioni risultano equivalenti a condizioni di contatto e di osculazione.

Premessa. I punti bicomplessi dell' S_r complesso rispondono, nella Geometria classica, alle coppie ordinate (X, Y) di punti dell' S_r complesso. Nella teoria generale delle algebre oltre l' algebra dei numeri bicomplessi esiste una seconda algebra di ordine 2, definita nel corpo complesso, commutativa e dotata di modulo: l' algebra dei numeri biduali. Ebbene *anche i punti biduali dell'* S_r *complesso si possono introdurre con le coppie ordinate* (X, Y) *di punti dell'* S_r *complesso.* Tale osservazione si estende alle algebre di ordine n, in relazione alle n-ple ordinate di punti dell' S_r complesso.

In corrispondenza alle coppie ordinate (X, Y) e alle terne ordinate (X, Y, Z) di punti dell' S_r complesso, e quindi ai punti bicomplessi, biduali, tricomplessi, complesso-biduali, triduali e tripotenziali dell' S_r complesso, rappresentati da tali coppie e terne di punti, si determinano, in questa nota, le condizioni analitiche e sintetiche per l' appartenenza di tali punti ad una data ipersuperficie algebrica ordinaria dell' S_r complesso. Si considerano anche le quaterne di punti (X, Y, Z, T) in relazione ai numeri quadripotenziali.

I punti *ipercomplessi* a cui si assimilano le n-ple ordinate di punti dell' S_r complesso, in relazione ad una fissata algebra complessa di ordine n, dotata di modulo, quando quest' algebra è irriducibile si dicono, in particolare, *supercomplessi* (come i numeri di una tale algebra). *La differenza fra i punti ipercomplessi e supercomplessi*, in relazione alla irriducibilità o riducibiltà dell'algebra che li determina, nell' S_r complesso, mediante le coppie di punti ordinate (X, Y) terne di punti ordinate (X, Y, Z) ecc. *si mette in evidenza quando si studiano le condizioni di appartenenza di un tale punto ipercomplesso o supercomplesso dell'* S_r *ad una ordinaria ipersuperficie algebrica* V_{r-1} *di detto* S_r.

Le condizioni di appartenenza ad una data ipersuperficie algebrica dell' S_r di punti supercomplessi risultano equivalenti a condizioni di contatto o di osculazione nel campo della Geometria nell' S_r complesso, come è già stato messo in evidenza, in una prima nota, relativa al caso $r = 2$ o $r = 3$, in relazione ai punti biduali, triduali e tripotenziali [1]).

1. Le coppie ordinate di punti dell' S_r complesso assimilate a punti bicomplessi o biduali.

Nell' S_r complesso, fissato un sistema di coordinate omogenee $(\sigma_1 \ldots \ldots, \sigma_{r+1})$, si considerino due punti $X(x_j)$ ed $Y(y_j)$. In corrispondenza alla coppia ordinata di punti (X, Y) si considerino le due matrici, a due righe ed $2(r + 1)$ colonne,

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 & \ldots\ldots & x_{r+1} & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & y_2 & \ldots\ldots & 0 & y_{r+1} \end{matrix} \right\|$$

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \ldots\ldots & x_{r+1} & y_{r+1} \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & \ldots\ldots & 0 & x_{r+1} \end{matrix} \right\|$$

la prima composta con le $r + 1$ matrici

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} x_i & 0 \\ 0 & y_i \end{matrix} \right\|$$

la seconda composta con le $r + 1$ matrici

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} x_j & y_j \\ 0 & x_j \end{matrix} \right\| .$$

Le matrici quadrate, di ordine 2, (3) e (4) costituiscono, rispettivamente, $r + 1$ *numeri bicomplessi* ed $r + 1$ *numeri biduali*. Essendo le x_j non tutte nulle, la matrice (2) risulta di caratteristica 2. Essendo le y_j non tutte nulle, pure la matrice (1) risulta di caratteristica 2. Ne segue che le $r + 1$ matrici (3) sono le coordinate di un punto dell' S_r bicomplesso, e le $r + 1$ matrici (4) sono le coordinate di un punto dell' S_r biduale. Sicchè la coppia ordinata di punti (X, Y) dell' S_r complesso si può *assimilare* al punto bicomplesso di coordinate (3), o al punto biduale di coordinate (4). Si ha perciò:

---

[1]) N. Spampinato. *Relazioni fra le proprietà di contatto e di osculazione di una curva o superficie con le algebre dei numeri biduali, triduali e tripotenziali.* (« La Ricerca »), Istituto Editoriale del Mezzogiorno, 1956).

Le coppie ordinate di punti (X Y) *dell'* S_r *complesso costituiscono sia un* S_r *bicomplesso sia un* S_r *biduale.*

2. Le terne ordinate di punti dell' S_r **complesso assimilate a punti di un** S_r **tricomplesso o complesso-biduale, o triduale, o tripotenziale.**

Nell' S_r complesso si considerino tre punti X (x_j), Y (y_j) e Z (z_j). In corrispondenza alla terna ordinata di punti (X, Y, Z) si considerino le quattro matrici, a tre righe $3(r+1)$ colonne, composte con le $r+1$ matrici rispettivamente,

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} x_j & 0 & 0 \\ 0 & y_j & 0 \\ 0 & 0 & z_j \end{matrix} \right\| ,$$

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} x_j & 0 & 0 \\ 0 & y_j & z_j \\ 0 & 0 & y_j \end{matrix} \right\| ,$$

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} x_j & y_j & z_j \\ 0 & x_j & 0 \\ 0 & 0 & x_j \end{matrix} \right\| ,$$

$$(8) \qquad \left\| \begin{matrix} x_j & y_j & z_j \\ 0 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & x_j \end{matrix} \right\| .$$

costituenti, rispettivamente, $r+1$ numeri *tricomplessi, complesso-biduali, triduali* e *tripotenziali*. Essendo le x_j non tutte nulle la matrice composta con le $r+1$ matrici (7) o (8), risulta di caratteristica 3. Essendo anche le y_j non tutte nulle la matrice composta con le $r+1$ matrici (6) risulta pure di caratteristica 3. Essendo, infine, anche le z_j non tutte nulle, come le x_j, e le y_j, anche la matrice composta con le $r+1$ matrici (5) risulta di caratteristica 3. Ne segue che:

Le $r+1$ *matrici* (5) o (6) o (7) o (8) *costituiscono, rispettivamente, le coordinate di un punto tricomplesso, complesso-biduale, triduale, tripotenziale.*

Sicchè la terna ordinata di punti (X,Y, Z) dell' S_r complesso si può assimilare al punto tricomplesso di coordinate (5) o al punto complesso

biduale di coordinate (6), o al punto triduale di coordinate (7) o, infine, al punto tripotenziale di coordinate (8). Si ha perciò:

Le terne ordinate di punti (X, Y, Z) *dell'* S_r *complesso costituiscono sia un* S_r *tricomplesso, sia un* S_r *complesso-biduale, sia un* S_r *triduale sia un* S_r *tripotenziale.*

3. Le *n*ple ordinate di punti dell' S_r complesso assimilate a punti di un S_r ipercomplesso legato ad una qualunque delle algebre di ordine *n*, commutative, dotate di modulo, definite nel corpo complesso.

Considerando una qualunque algebra A, di ordine n,'definita nel corpo complesso, dotata di modulo e commutativa, messi gli elementi di una tale algebra sotta forma di matrice quadrata di ordine n, dipendenti da n numeri complessi $x, y, z, \ldots t$, in corrispondenza ad una n-pla ordinata di punti (X, Y, Z, . . . T) dell' S_r complesso di coordinate (x_j), (y_j), (z_j), . . ., (t_j), si costruiscono $r + 1$ matrici quadrate di ordine n costituenti $r + 1$ elementi di tale algebra. La matrice ad n righe ed $n\ (r + 1)$ colonne composta con dette $r + 1$ matrici risulta sempre di caratteristica massima essendo ciascuna delle $(r + 1)$-ple di numeri complessi (x_j), (y_j), (z_j), . . . , (t_j) costituita da numeri non tutti nulli, e quindi tali $r + 1$ matrici costituiscono un punto dell' S_r ipercomplesso legato alla fissata algebra A, a cui si può assimilare la data n-pla ordinata di punti (X, Y, Z, ... , T) dell' S_r complesso. Si ha perciò:

Le n*-ple ordinate di punti* (X, Y, Z, ... , T) *dell'* S_r *complesso costituiscono un* S_r *ipercomplesso legato ad una qualunque algebra definita nel corpo complesso, commutativa e dotata di modulo.*

Per $n = 2$ si ha la proposizione del n° 1. Per $n = 3$ si ha la proposizione del n° 2.

4. Punti bicomplessi di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.

Data nell'S_r complesso una ipersuperficie algebrica V_{r-1} di equazione:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r+1}) = 0, \tag{9}$$

l' appartenenza alla V_{r-1} del punto bicomplesso avente per coordinate gli $r+1$ numeri bicomplessi rappresentati dalle $r+1$ matrici (3), si ha quando risulta nulla la matrice che si ottiene sostituendo alle variabili complesse σ_j nella forma (a coefficienti complessi) $f(\sigma_j)$ ed eseguendo le operazioni col calcolo delle matrici. Con tale sostituzione, eseguendo i calcoli, si ha la matrice:

$$\begin{vmatrix} f(x_j) & 0 \\ 0 & f(y_j) \end{vmatrix} \tag{9}$$

Per essere questa la matrice nulla devono essere soddisfatte le due condizioni

$$f(x_j) = 0 \quad , \quad f(y_j) = 0 \,, \tag{10}$$

cioè i due punti X, Y, della coppia ordinata (X, Y) che è stata assimilata al punto bicomplesso considerato, di coordinate (3) devono appartenere entrambi alla ipersuperficie V_{r-1}. Si ha perciò, com' è noto:

Le coppie ordinate di punti (X, Y) *di una ipersuperficie* V_{r-1} *dell'* S_r *complesso costituiscono i punti bicomplessi di tale* V_{r-1}.

5. Punti biduali di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.

L' appartenenza alla ipersuperficie V_{r-1} dell' S_r complesso, di equazione (9) del punto biduale avente per coordinate gli $r+1$ numeri biduali rappresentati dalle $r+1$ matrici (4), si ha quando risulta nulla la matrice che si ottiene sostituendo nella forma $f(\sigma_j)$ ai numeri complessi σ_j tali $r+1$ matrici, cioè la matrice:

$$\begin{vmatrix} f(x_j) & \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \cdot y_j \\ 0 & f(x_j) \end{vmatrix} . \tag{11}$$

Per essere questa matrice nulla devono essere soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} f(x_j) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} = 0 \end{cases} , \tag{12}$$

cioè il primo punto X, della coppia ordinata (X, Y), che è stata assimilata al punto biduale considerato, deve appartenere alla V_{r-1}, ed il secondo punto Y, se X è semplice per la V_{r-1}, deve appartenere all' iperpiano tangente alla V_{r-1} nel punto X; se X è multiplo per la V_{r-1} il secondo punto Y della coppia non deve soddisfare alcuna condizione perchè in tal caso, risultando nulle le derivate di $f(\sigma_j)$ calcolate nel punto X (x_j), la seconda delle equazioni (12) risulta identicamente soddisfatta. Si ha perciò:

Le coppie ordinate (X, Y) *dell'* S_r *complesso costituenti i punti biduali della ipersuperficie* V_{r-1} *sono tutte e sole le coppie aventi il primo punto* X *sulla* V_{r-1}, *ed il secondo punto* Y *nell' iperpiano tangente alla* V_{r-1} *in* X, *se* X *è semplice per questa, qualunque se* X *è multiplo per la* V_{r-1}.

6. Punti tricomplessi di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.

L' appartenenza alla ipersuperficie V_{r-1} dell' S_r complesso, di equazione (9) del punto tricomplesso avente per coordinate gli $r+1$ numeri tricomplessi rappresentati dalle $r+1$ matrici (5) si ha quando risulta nulla la matrice:

$$(13) \qquad \begin{Vmatrix} f(x_j) & 0 & 0 \\ 0 & f(y_j) & 0 \\ 0 & 0 & f(z_j) \end{Vmatrix}$$

Per essere questa matrice nulla devono essere soddisfatte le tre condizioni:

$$(14) \qquad f(x_j) = 0 \quad , \quad f(y_j) = 0 \quad , \quad f(z_j) = 0$$

cioè i tre punti X, Y, Z della terna ordinata (X, Y, Z), che è stata assimilata al punto tricomplesso considerato di coordinate (5), devono appartenere tutti e tre alla V_{r-1}. Si ha perciò, com' è noto:

Le terne ordinate di punti (X, Y, Z) *di una ipersuperficie* V_{r-1} *dell'* S_r *complesso costituiscono i punti tricomplessi di tale* V_{r-1}.

NOTA. Questa proposizione si estende nella seguente:

Le n*-ple ordinate di punti* (X, Y, Z, ..., T) *di una* V_{r-1} *dell'* S_r *complesso costituiscono i punti* n*-complessi di tale* V_{r-1}.

Ciò segue dalla proprietà dei numeri n-complessi di essere rappresentati sotto forma di matrici quadrate, da matrici quadrate di ordine n, ad elementi complessi, aventi nulli tutti gli elementi non posti nella diagonale principale, cioè del tipo (5), per $n = 3$.

7. Punti complesso-biduale di una ipersuperficie dell' S_r complesso.

L'appartenenza alla ipersuperficie V_{r-1} dell' S_r complesso, di equazione (9) del punto complesso-biduale avente per coordinate le $r+1$ matrici (6) si ha quando risulta nulla la matrice:

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} f(x_j) & 0 & 0 \\ 0 & f(y_j) & \sum \frac{\partial f}{\partial y_j} z_j \\ 0 & 0 & f(y_j) \end{matrix} \right\|$$

Per essere nulle questa matrice devono essere soddisfatte le tre condizioni:

$$(16) \qquad \begin{cases} f(x_j) = 0 \\ f(y_j) = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial y_j} z_j = 0 \end{cases},$$

cioè i punti X ed Y devono appartere alla V_{r-1} ed il punto Z, se Y è semplice per la V_{r-1}, deve appartenere all' iperpiano tangente alla V_{r-1} nel punto Y. Se Y è multiplo per la V_{r-1} il terzo punto Z della terna non deve soddisfare ad alcuna condizione. Si ha perciò:

Le terne ordinate (X, Y, Z) *di punti dell'* S_r *complesso costituenti i punti complesso-biduali di una ipersuperficie* V_{r-1} *sono tutte e solo le terne aventi i primi due punti* X, Y *sulla* V_{r-1} *ed il terzo punto* Z: *nell' iperpiano tangente alla* V_{r-1} *in* X, *se* Y *è semplice per la* V_{r-1}, *qualunque se* Y *è multiplo per la* V_{r-1}.

8. **Punti triduali di una ipersuperficie algebrica dall' S_r complesso.**

L' appartenenza alla ipersuperficie di equazione (9) del punto triduale di coordinate triduali rappresentati dalle $r + 1$ matrici (7) si ha quando risulta nulla la matrice:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} f(x_j) & \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j & \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j \\ 0 & f(x_j) & 0 \\ 0 & 0 & f(x_j) \end{vmatrix}$$

Per essere nulla questa matrice devono essere soddisfatte le tre condizioni:

$$(18) \qquad \begin{cases} f(x_j) = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j \end{cases},$$

cioè il punto X deve appartenere alla V_{r-1} ed i punti Y e Z, se X è semplice per la V_{r-1} devono appartenere all' iperpiano tangente alla V_{r-1} in X, Y e Z non devono invece soddisfare ad alcuna condizione se X è multiplo per la V_{r-1}. Si ha perciò:

Le terne ordinate (X, Y, Z) *di punti dell'* S_r *complesso costituenti i punti triduali di una ipersuperficie algebrica dell'* S_r *complesso* V_{r-1} *sono tutte e sole le terne aventi il primo punto* X *sulla* V_{r-1} *e gli altri due punti* Y, Z: *sull' iperpiano tangente alla* V_{r-1} *in* X, *se* X *è semplice per la* V_{r-1}, *qualunque se* X *è multiplo per la* V_{r-1}.

9. Punti tripotenziali di una ipersuperficie dell' S_r complesso.

L' appartenenza alla ipersuperficie di equazione (9) dell' S_r complesso del punto tripotenziale avente per coordinate gli $r+1$ numeri tripotenziale rappresentati dalle $r+1$ matrici (8), si ha quando risulta nulla la matrice che si ottiene sostituendo alle $r+1$ variabili complesse σ_j nella forma $f(\sigma_j)$ le $r+1$ matrici (8), cioè la matrice:

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} f(x_j) & \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, y_j \;\frac{1}{2}\left[\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, y_i\, y_j\right] + \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, z_j \\ 0 & f(x_j) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, y_j \\ 0 & 0 \qquad\qquad f(x_j) \end{vmatrix}$$

Per essere nulla questa matrice devono essere soddisfatte le tre condizioni:

$$(20)\qquad \begin{cases} f(x_j) = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, y_j = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, z_j + \frac{1}{2}\left[\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\, y_i\, y_j\right] = 0 \end{cases} .$$

La prima condizione porta che il punto X deve appartenere alla V_{r-1} data, di equazione (9). *Se* X *è multiplo per la* V_{r-1} con multiplicità > 2 le altre due condizioni risultano soddisfatte, qualunque siano gli altri due punti Y e Z della terna ordinata (X, Y, Z) costituente il punto tripotenziale considerato. *Se invece* X *è doppio* per la V_{r-1} la seconda condizione è soddisfatta qualunque sia Y e la terza condizione si riduce, qualunque sia il terzo punto Z, alla condizione:

$$(21)\qquad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, y_i\, y_j = 0 \;,$$

cioè il punto Y deve appartenere all' ipercono tangente alla V_{r-1} nel punto doppio X. Se, infine, *X è semplice* per la V_{r-1} la seconda condizione (20)

porta che Y deve appartenere all' iperpiano tangente alla V_{r-1} nel punto X. Fissato Y in tale iperpiano, distinto da X, resta determina la tangente XY alla V_{r-1} in X. Per fissare un punto Z in modo da soddisfare, insieme ai due punti X, Y già fissati, alla terza condizione (20), si noti che *le tre condizioni* (20) *equivalgono alla condizione che la conica* c^2, *di equazioni parametriche:*

$$\rho_j = x_j + y_j\,\rho + z_j\,\rho^2\,, \tag{22}$$

passante per X, ed avente in X la tangente XY, *osculi la* V_{r-1} *in X.*

Infatti sostituendo le (22) nell' equazione (9) della V_{r-1} si ha un'equazione, di grado $2n$ in ρ [se diciamo n l' ordine della V_{r-1}]:

$$F\,(\rho) = 0\,. \tag{23}$$

con il polimonio $F\,(\rho)$ in ρ avente per termine noto, per coefficienti di ρ^2 tre espressioni, dipendenti dalle coordinate x_j, y_j e z_j di X, Y, Z, date precisamente, dai primi membri delle tre condizioni (20). Si chè queste sono soddisfatte quando e solo quando la conica c^2 di equazioni (22) osculi la V_{r-1} in X.

Si noti ora che posto:

$$q_j = x + y_j + z_j \tag{24}$$

il punto $Q\,(q_j)$, del piano XYZ, insieme ai tre punti X, Y, Z, dà la quaterna ordinata (X, Y, Z, Q) che determina la conica c^2 di equazioni (22) con le segnenti proprietà: passa per i tre punti X, Z e Q ed ha in X la tangente XY e in Z la tangente ZY. Tale conica è *la conica osculatrice principale* di ogni ramo del piano XYZ avente per ridotta di grado 2 le (22).

10. Osservazione relativa alle condizioni di appartenenza ad una ipersuperficie dell' S_r complesso di un punto ipercomplesso.

In relazione alle proposizioni dimostrate nei n^i 4, 5, 6, 7, 8 e 9, si noti che dei punti X, Y costituenti la coppia ordinata (X, Y), o X, Y, Z costituenti la terna ordinata (X, Y, Z il primo punto appartiene sempre X, alla ipersuperficie V_{r-1} fissata in S_r quando s' impone l' appartenenza alla V_{r-1} del punto ipercomplesso costituito da tale coppia o terna, e *vi appartiene solo* tale primo punto X quando l' algebra è quella dei numeri biduali o triduali o tripotenziali, *cioè quando l' algebra* (di ordine 2 o 3 *considerata è irriducibile*, ovvero nel caso particolare che si tratti di un punto *supercomplesso*). Ciò dipende dalla proprietà che le matrici (4) (7) ed (8) che rappresentano i numeri biduali, triduali e tripotenziali, nella diagonale principale hanno soltanto la variabile x_j, e conseguentemente nelle matrici (11), (17) e (19) che si ottengono sostituendo le precedenti,

rispettivamente, nella forma $f(\sigma_j)$, che eguagliata a zero dà l' equazione (9) della V_{r-1}, hanno gli elementi della diagonale principale tutti dati dalla forma $f(x_j)$. e quindi l' annullare tali elementi della diagonale principale porta sempre alla sola condizione $f(x_j) = 0$, cioè all' appartenza del punto X alla V_{r-1}; nè l' annullare gli altri elementi può portare l' appartenenza del punto Y o del punto Z alla V_{r-1}, perchè le forme $f(y_j)$ e $f(z_j)$, intervengono solo nella diagonale principale solo nei casi dei numeri bicomplessi, complesso-biduali e tricomplessi, cioè nel caso delle algebre riducibili.

[Tale proprietà si estende al caso n qualunque, perchè la matrice quadrata di ordine n che rappresenta un numero ipercomplesso di un' algebra complessa di ordine n, dotata di modulo, commutativa, col modulo rappresentato dalla matrice identica, risulta con gli elementi della diagonale principale eguali fra di loro solo se l' algebra è irriducibile, cioè solo se si tratta di numeri supercomplessi].

In relazione al secondo punto Y o al terzo punto Z, nel caso delle terne, nel caso di numeri supercomplessi biduali, triduali e tripotenziati, si noti che essi intervengono nelle suddette condizioni di appartenenza di tali punti alla V_{r-1} con condizioni di natura tangenziale o di osculazione].

11. Punti quadripotenziali di una ipersuperficie dell' S_r complesso.

In corrispondenza ad una quaterna ordinata di punti (X, Y, Z, T) dell' S_r complesso di coordinate (x_j), (y_j), (z_j) e (t_j) $(j = 1, \ldots, r+1)$ si formano, come s' è visto per le coppie o terne ordinate di punti, $r+1$ matrici rappresentanti $r+1$ numeri di un' algebra di ordine $n = 4$, commutativa e dotata di modulo. Fra queste ve ne sono quattro irriducibili: i numeri quadriduali, quadrisemiduali, quadrisemipotenziali e quadripotenziali. Questi ultimi sono rappresentati dalle matrici quadrate, ad elementi complessi,

$$(24) \qquad \begin{matrix} x_j & y_j & z_j & t_j \\ 0 & x_j & y_j & z_j \\ 0 & 0 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & x_j \end{matrix}$$

La quaterna di punti (X, Y, Z, T) si può considerare assimilata al punto quadripotenziale avente per coordinate le $r+1$ matrici (24), una delle quali sarà certamente a determinante non nullo dato che le x_j, coordinate di X non sono tutte nulle, e quindi la matrice composta con le $r+1$ matrici (24) risulterà a caratteristica massima.

Sostituendo, come nei casi precedenti, alle variabili σ_j nella forma $f(\sigma_j)$ le matrici (24) si ha una matrice che porta, imponendo che sia nulla, cioè che detto punto quadripotenziale appartenga alla V_{r-1} di equazione (9), a quattro condizioni di cui le prime tre sono le (20), ottenute nel caso tripotenziale, e la quarta è:

$$(25)\quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, t + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\, y_i\, z_j + \frac{1}{6} \sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j \partial x_k}\, y_i\, y_j\, y_k = 0$$

Si ha perciò

I) *Le condizioni di appartenenza del punto quadripotenziale a cui si è assimilata la quaterna ordinata* (X, Y, Z, T) *di punti dell'* S_r *complesso, alla ipersuperfieie* V_{r-1} *di equazione* (9) *sono date dalle* (20) *e* (25).

Per dare un'interpretazione sintetica alle quattro condizioni (20) e (25) si consideri in S_r la cubica c^3 di equazioni parametriche:

$$(26)\qquad \sigma_j = x_j + y_j\, \rho + z_j\, \rho^2 + t_j\, \rho^3\,,$$

(passante per X, avente in X la tangente XY ed il piano osculatore XYZ, ed appartenente all'S_3 XYZT, supposti indipendenti i quattro punti della quaterna ordinata data (X, Y, Z, T).

Sostituendo le (26) dell'equazione (9) della V_{r-1} si ha una equazione di grado $3n$ in ρ

$$(27)\qquad G(\rho) = 0$$

con il polinomio G ρ) avente per termine noto, coefficiente di ρ e di ρ^2 i primi membri delle tre equazioni (20), e per coefficiente di ρ^3 il primo membro della (25). Sicchè le condizioni (20 e (25) sono soddisfatte quando e solo quando la cubica c^3 di equazioni parametriche (26) oscula nel punto X la V_{r-1} con contatto quadripunto almeno. Si ha pertanto:

II) *Il punto quadripotenziale a cui si assimila la quaterna di punti* (X, Y, Z, T) *dell'* S_r *complesso appartiene ad una superficie* V_{r-1} *di* S_r *quando e solo quando la cubica di equazioni* 26) *oscula la* V_{r-1} *nel punto* X *con contatto quadripunto almeno.*

Si noti che la c^3 di equazioni (26) è la *cubica osculatrice principale* di ogni ramo di S_3 avente per ridotta di grado 3 le (26).

NOTA. Questa proprietà estende la I) del n° 9 e si estende ai punti n-potenziali a cui si assimilinano le n-ple ordinate di punti di S_r, (X, Y, Z, ... , T) in relazione alla c^{n-1} di equazioni parametriche

$$(28)\qquad x_i = \sigma_i + y_i\, \rho + z_i\, \rho^2 + \ldots . + t_i\, \rho^{n-1}\,.$$

Anche la proprietà dimostrata nel n° 5 in relazione ai numeri biduali

si estende ai numeri n-duali a cui si assimilano pure le dette n-ple ordinate di punti. L' estensione al caso triduale si ha nel n° 8.

Si noti esplicitamente che i numeri n-potenziali e i numeri n-duali per $n = 2$ non costituiscono due algebre distinte. Ciò risponde alla circostanza che la osculazione della c^{n-1} alla V_{r-1} nel punto X, nel caso $n = 2$, si riduce alla tangenza alla V_{r-1} nel punto X della retta XL di equazioni

$$\sigma_j = x_j + y_j \rho \tag{29}$$

12. Gli E_1 dell' S_r complesso e le catene di punti biduali che essi determinano in S_r.

Fissiamo nell' S_r complesso un E_1 di centro X e tangente t, e quindi costituito dalla coppia di punti (X, X') con X' punto di t infinitamente vicino ad X. In corrispondenza a tale $E_1 = (X, t)$ consideriamo in S_r gli ∞^1 punti biduali dati dalle ∞^1 coppie ordinate di punti (X, Y) con Y variabile nella retta t, costituenti un insieme che diremo la *catena speciale di coppie di punti determinata da* E_1.

Si noti ora che *se uno di detti* ∞^1 *punti biduali, costituito dalla coppia ordinata* (X, Y) *appartiene ad una data ipersuperficie algebrica* V_{r-1}, *tutti i punti biduali di detta catena speciale appartengono alla* V_{r-1}, perchè la retta t congiungente X con Y, per la proprietà dimostrata nel n. 5, risulta: o tangente alla V_{r-1} nel punto X (che deve appartenere alla V_{r-1}) o una retta qualunque della stella di centro X nel caso, particolare, che X sia multiplo per la V_{r-1}.

Si noti inoltre che (come ho già notato) [1]).

L' insieme delle ∞^{2r-1} *catene speciali dell'* S_r *biduale, costituito dai punti biduali dell'* S_r *complesso a cui si assimilano le coppie ordinate di punti di questo* S_r, *è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con gli* ∞^{2r-1} E_1 *dell'* S_r *complesso.*

Lo studio di una ipersuperficie algebrica dell' S_r *complesso come insieme dei punti biduali che essa contiene, equivale allo studio di detta ipersuperficie come insieme dei suoi* E_1.

INDICE

Premessa.

1. Le coppie ordinate di punti dell' S_r complesso assimilati a punti bicomplessi o biduali.

[1]) N. Spampinato. *Rappresentazione nell'* S_{2r+1} *complesso di una serie lineare secata su una curva dell'* S_r *complesso da un fascio di ipersuperficie, prolungata nel campo biduale.* Rend. dell' Acc. delle Sc. Fis. e Mat. (1956).

2. Le terne ordinate di punti dell' S_r complesso assimilate a punti di un S_r tricomplesso, o complesso-biduale, o triduale, o tripotenziale.
3. Le n-ple ordinate di punti dell' S_r complesso assimilati a punti di un S_r ipercomplesso, legato ad una qualunque delle algebre complesse di ordine n, commutative, dotate di modulo, definite nel corpo complesso.
4. Punti bicomplessi di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.
5. Punti biduali di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.
6. Punti tricomplessi di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.
7. Punti complesso-biduali di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.
8. Punti triduali di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.
9. Punti tripotenziali di una ipersuperficie algebrica dell' S_r complesso.
10. Osservazione relativa alle condizioni di appartenenza ad una ipersuperficie dell' S_r complesso di un punto ipercomplesso.
11. Punti quadripotenziali di una ipersuperficie dell' S_r complesso.
12. Gli E_1 dell' S_r complesso e le catene di punti biduali che essi deteminano in S_r.

Un' osservazione sul problema di Dirichlet

Nota di **Donato Greco**, *presentata dal socio* **C. Miranda**

[Adunanza del dì 16 giugno 1956]

Sunto. – Si assegnano delle condizioni sufficienti per la risolubilità del problema di Dirichlet in certe classi funzionali considerate da L. Amerio.

1. Sia

$$(1)\quad \mathfrak{M}[u] \equiv \sum_{h,k}^{1\ldots m} a_{h,k}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)\,u = 0$$

un' equazione lineare omogenea del secondo ordine di tipo ellittico, con coefficienti definiti in tutto lo spazio $S_{(m)}$ e tali da risultare ivi $a_{h,k}(x) \in C^{(2,\lambda)}$ $b_k(x) \in C^{(1,\lambda)}$, $c(x) \in C^{(0,\lambda)}$, $c(x) \leqq 0$. Supporremo inoltre che le $a_{h,k}(x)$ siano uniformemente λ-hölderiane in $S_{(m)}$, che il discriminante $A(x)$ della forma quadratica associata all' operatore $\mathfrak{M}$ ammetta un estremo inferiore positivo in $S_{(m)}$, e che esistano un dominio limitato D ed un numero reale $g \neq 0$ tali che per $x \in \complement D$ riesca $c(x) \leqq -g^2$ [1]).

Assegnato un dominio T, che per quanto ci occorrerà in seguito ci conviene supporre di classe $A^{(3)}$, si sogliono associare alla (1) i due operatori di frontiera:

$$\mathfrak{B}[u] \equiv a(x)\,\frac{du}{d\nu}, \qquad \mathfrak{C}[v] \equiv a(x)\,\frac{dv}{d\nu} - b(x)\,v$$

dove ν è la conormale esterna ad $\mathfrak{F}T$ ed $a(x)$, $b(x)$ sono certe funzioni che si costruiscono in modo noto a partire dai coefficienti dell'operatore $\mathfrak{M}$ e dal dominio T [2]).

---

[1]) L' ipotesi che i coefficienti dell' operatore $\mathfrak{M}$ siano definiti in tutto $S_{(m)}$ non è restrittiva, in quanto è noto che se tali coefficienti si suppongono assegnati in un dominio T sufficientemente regolare essi sono prolungabili in tutto $S_{(m)}$ rispettando tutti i caratteri di regolarità di cui alle ipotesi del testo. Cfr. la monografia [6] di C. Miranda di cui alla bibliografia finale, Cap. III, n° 21; a tale opera rimandiamo per le nozioni e la nomenclatura di cui faremo uso.

[2]) Precisamente si ha:

$$a(x) \equiv \left[\sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{h,k}(x) X_k(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad b(x) \equiv \sum_{h=1}^{m}\left(b_h(x) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_{h,k}}{\partial x_k}\right) X_h(x)$$

le quantità $X_h(x)$ essendo i coseni direttori della normale ad $\mathfrak{F}T$.

Le ipotesi formulate sui coefficienti assicurano che l' equazione (1) ammette una ed una sola soluzione fondamentale principale $G(x, y)$ definita in tutto lo spazio ed infinitesima all' infinito, di tipo esponenziale, con le sue derivate parziali prime [3]).

E' allora di grande importanza, nello studio dei problemi al contorno relativi all' equazione (1), la considerazione della classe funzionale $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ costituita dalle funzioni $u(x)$ che godono delle seguenti proprietà [4]):

α) $u(x)$ è soluzione di classe $C^{(2)}$ della (1) in $T - \mathfrak{F} T$;

β) per x_0 quasi ovunque su $\mathfrak{F}T$ esistono i limiti:

$$2) \qquad \lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0) \ , \ \lim_{x \to x_0} \mathfrak{S}[u(x)] = \psi(x_0)$$

dove x tende ad x_0 lungo la normale ad $\mathfrak{F}T$ in x_0, e tali limiti risultano di potenza p^{ma} sommabile su $\mathfrak{F}T$ (con $\mu \geqq 1$):

γ) per $u(x)$ vale la formola di Green-Stokes:

$$(3) \qquad u(x) = \int_{\mathfrak{F}T} \dot{} \left(\psi(y)\ G(x, y) - \varphi(y) \mathfrak{D}_y [G(x, y)] \right) d_y \sigma$$

$$(3') \qquad 0 = \int_{\mathfrak{F}T} \dot{} \left(\psi(y)\ G(\xi, y) - \varphi(y)\ \mathfrak{D}_y [G(\xi, y)] \right) d_y \sigma$$

ove con x e ξ si sono indicati, rispettivamente, il punto variabile in $T - \mathfrak{F}T$ ed il punto variabile in $\mathfrak{C}T$.

Invero L. Amerio ha dimostrato [1] che l' appartenenza di una soluzione della (1) alla classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ è condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità al calcolo della $u(x)$ del metodo di M. Picone che, com' è noto, consiste nella traduzione del problema in un sistema di equazioni integrali di Fischer-Riesz [5]).

Alla base della trattazione di Amerio sta il seguente fondamentale teorema di inversione:

Se $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, *supposte di classe* $L^{(p)}$ [6]) *verificano la* (3') *qualunque sia* ξ *in* $\mathfrak{C}T$, *la funzione* $u(x)$ *definita dalla* (3) *appartiene alla classe* $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ *e verifica la* (1).

Di grande importanza nello studio di queste questioni è anche il se-

[3]) [6], Cap. III, n° 29.

[4]) [6], Cap. IV, n° 31.

[5]) [6], loc. cit in nota [4]).

[6]) Indichiamo, come di consueto, con $L^{(p)}$ la classe delle funzioni a potenza p^{ma} sommabile.

guente teorema di G. Fichera 3] che caratterizza completamente la classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ [7]:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $u(x)$ *appartenga alla classe* $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ *è che esista una funzione* $\theta(x)$, *di classe* $L^{(p)}$ *su* $\mathfrak{F}T$, *tale da risultare:*

$$u(x) = \int_{\mathfrak{F}T} G(x,y)\,\theta(y)\,d_y\sigma \quad .$$

Se si considera il problema di Dirichlet consistente nel ricercare una soluzione della (1) che assuma su $\mathfrak{F}T$, nel senso generalizzato (2), i valori di un' assegnata funzione $\varphi(x) \in L^{(p)}$, il richiedere che la soluzione $u(x)$ appartenga alla classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ impone alla $u(x)$ una restrizione ulteriore, oltre quella di ridursi a $\varphi(x)$ su $\mathfrak{F}T$, in quanto esige l' esistenza del secondo dei limiti (2), quasi ovunque su $\mathfrak{F}T$, e la sommabilità di esso con l' esponente p.

Si pone dunque la questione di assegnare delle condizioni, sui dati al contorno $\varphi(x)$, atte ad assicurare la risolubilità del problema di Dirichlet nella classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$.

Recentemente lo stesso Amerio ha dimostrato [2] che *condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una (ed una sola) soluzione del problema di Dirichlet, con* $\varphi(x) \in L^{(p)}$, *appartenente alla classe* $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$, *è che il potenziale di doppio strato di momento* $\varphi(x)$:

$$w(x) = \int_{\mathfrak{F}T} \varphi(y)\,\mathfrak{D}_y\,[G(x,y)]\,d_y\sigma$$

appartenga a $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$. La trattazione di Amerio è fatta per l' equazione $\Delta_2 u - \lambda u = 0$ e per $p = 1$. L' estensione al caso generale è però immediata.

2. Può essere utile assegnare delle condizioni sufficienti, di natura più semplice, che assicurino, sotto ipotesi qualitative per i dati al contorno, l' appartenenza della soluzione del problema di Dirichlet alla classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$.

Con la presente osservazione dimostriamo due teoremi che forniscono appunto dei criteri per la scelta dei dati al contorno.

Il primo di tali teoremi è il seguente:

I. = *Se* $v(x)$ *è una funzione assolutamente continua con le sue de-*

[7]) La dimostrazione del Fichera è svolta nell' ipotesi $\mathfrak{M} = \Delta_2$, $m = 3, p = 1$. Per il caso $\mathfrak{M} = \Delta_2 - \lambda^2$ cfr. [1]. L' estensione al caso generale è implicitamente contenuta nella dimostrazione del teorema (31, VII) di [6].

rivate prime in $T - \mathfrak{F}T$, *la* $v(x)$ *e le sue derivate prime e seconde riuscendo di classe* $L^{(p)}$ *in* T $(p > 1)$, *nella classe* $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ *esiste una* (*ed una sola*) *soluzione* $u(x)$ *del problema di Dirichlet relativo all' equazione* (1) *ed alle condizioni al contorno:*

$$u(x) = v(x) \qquad \text{per } x \in \mathfrak{F}T$$

$v(x)$ *essendo la traccia di* $v(x)$ *su* $\mathfrak{F}T$.

Ricordiamo ora che se $G(x, y)$ è una soluzione fondamentale della (1) una funzionale di Levi $L(x, y)$ relativa all' operatore $\mathfrak{M}$ verifica le limitazioni:

$$L(x, y) - G(x, y) = O\left(\overline{x\,y}^{2+\lambda-m}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[L(x, y) - G(x, y)] = O\left(\overline{x\,y}^{1+\lambda-m}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}[L(x, y) - G(x, y)] = O\left(\overline{x\,y}^{\lambda-m}\right)$$

con $0 < \lambda \leqq 1$ [1].

Dopo di ciò possiamo enunciare il teorema

II. = *Se* $\zeta(x)$ *è una funzione assegnata su* $\mathfrak{F}T$, *ed ivi di classe* $L^{(p)}$ $(p > 1)$, *ed* $L(x, y)$ *è una funzione di Levi relativa all' operatore* $\mathfrak{M}$, *per la quale riesca* $\lambda > \dfrac{p-1}{p}$, *esiste, nella classe* $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$, *una* (*ed una sola*) *soluzione del problema di Dirichlet relativo all' equazione* (1) *e alla condizione al contorno:*

$$u(x) = \int_{\mathfrak{F}T} L(x, y)\,\zeta(y)\,d_y\,\sigma \qquad \text{per } x \in \mathfrak{F}T.$$

Col teorema II si risponde, ma solo in parte, ad un quesito proposto dal Prof. Fichera e segnalatomi dal Prof. Miranda.

Per rispondere in moto completo a tale quesito occorrerebbe ancora investigare se, nelle ipotesi del teorema II, la $u(x)$ appartenga non solo a $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$, ma anche ad ogni altra classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M}')$, essendo $\mathfrak{M}'$ un operatore ellittico distinto da $\mathfrak{M}$. Questo risultato riesce qui acquisito solo nel caso che $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{M}'$ abbiano eguali i coefficienti delle derivate del secondo ordine perchè allora ogni funzione di Levi relativa all' operatore $\mathfrak{M}$ è funzione di Levi anche per l' operatore $\mathfrak{M}'$. Nel caso generale lo studio della questione appare arduo e richiede, probabilmente, l'impiego di mezzi analitici meno elementari di quelli qui adoperati.

[1] [6], Cap. III, n° 19.

3. Prima di passare alla dimostrazione dei teoremi I e II è opportuno effettuare una precisazione circa la traccia su $\mathfrak{F}T$ di una funzione definita in T.

Sia $v(x)$ una funzione assolutamente continua con le sue derivate prime $p_i(x)$ in $T - \mathfrak{F}T$, T essendo un dominio di classe $A^{(3)}$, e si supponga che $v(x)$ e le $p_i(x)$ siano sommabili su T. Segue allora, da un teorema di G. Fichera [4], che la $v(x)$ e le sue derivate prime ammettono delle traccie su $\mathfrak{F}T$, ossia che per x_0 quasi ovunque su $\mathfrak{F}T$ esistono i limiti:

$$\lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} p_i(x) = p_i(x_0)$$

dove si può supporre che x tenda ad x_0 lungo la normale ad $\mathfrak{F}T$ in x_0. Di più, se si considera l'ipersuperficie S_t, parallela ad $\mathfrak{F}T$ e distante di t da essa, i valori $v^{(t)}(x)$, $p_i^{(t)}(x)$ assunti da $v(x)$ e dalle $p_i(x)$ su S_t sono sommabili su S_t, uniformemente rispetto a t, onde $\overline{v}(x)$ e le $\overline{p}_i(x)$ riescono sommabili su $\mathfrak{F}T$.

Se si suppone, come nell'enunciato del teorema I, che $v(x)$ e le sue derivate prime e seconde siamo di potenza $p^{m\alpha}$ sommabile, si ha di più che $\overline{v}(x)$ e le $\overline{p}_i(x)$ sono di potenza $p^{m'\alpha}$ sommabile su $\mathfrak{F}T$. Ciò segue dalla seguente limitazione [9].

$$\int_{S_t} |v(x)|^p \, d\sigma_t \leq K \left\{ \int_T |v(x)|^p \, dx + \int_T \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right\}$$

che è applicabile sia alla $v(x)$ che alle $p_i(x)$.

Osserviamo ancora che, nelle ipotesi poste per la $v(x)$ nel teorema I e detta $z(x)$ una qualunque funzione di classe $C^{(2)}$, sussiste senz'altro la formola di Green:

$$(4) \qquad \int_T \left(z\, \mathfrak{M}[v] - v\, \mathfrak{N}[z] \right) dx = \int_{\mathfrak{F}T} \left(z\, \mathfrak{S}[v] - v\, \mathfrak{Q}[z] \right) d\sigma$$

ove $\mathfrak{N}$ è l'operatore aggiunto di $\mathfrak{M}$ e si intende che per ogni punto $x_0 \in \mathfrak{F}T$ riesce:

$$\mathfrak{S}[v(x_0)] = \sum_{i,k}^{1..m} a_{i,k}(x_0)\, \overline{p}_i(x_0)\, X_i(x_0)$$

---

[9] Cfr. ad es. [5], lemma I.

Ne segue altresì che per $v(x)$ vale la formola di STOKES che si può scrivere:

$$(5) \qquad v(x) = -\int_{T}^{\cdot} G(x, y)\ \mathfrak{M}\ [v(y)]\ dy +$$

$$+ \int_{\mathfrak{F}T}^{\cdot} (G(x, y)\ \mathfrak{F}[v(y)] - v(y)\ \mathfrak{D}_y [G(x, y)])\ d_y \sigma$$

essendo $G(x, y)$ la soluzione fondamentale principale della (1).

4. In virtù del risultato di AMERIO menzionato alla fine del n° 1, per dimostrare il teorema I basta provare che, nelle ipotesi in esso formulate, il potenziale di doppio strato

$$w(x) = \int_{\mathfrak{F}T}^{\cdot} v(y)\ \mathfrak{D}_y [G(x,y)]\ d_y \sigma$$

considerato come funzione del punto x variabile in T appartiene a $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$.

Poichè, come si è detto al n° 3, per la $v(x)$ vale la formola (5) di STOKES, da essa si trae;

$$(6) \qquad w(x) = w_1(x) - [v(x) + v_1(x)],$$

dove si è posto

$$w_1(x) = \int_{\mathfrak{F}T}^{\cdot} \mathfrak{F}[v(y)]\, G(x, y)\ d_y \sigma$$

$$v_1(x) = \int_{T}^{\cdot} G(x, y)\ \mathfrak{M}\ [v(y)]\ dy\ .$$

Per quanto si è detto al n° 3, la funzione $w_1(x)$ è un potenziale di semplice strato con densità di classe $L^{(p)}$. Tale funzione allora, per il teorema di FICHERA di cui al n° 1, appartiene alla classe $\Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$.

Quanto al potenziale di dominio $v_1(x)$ esso verifica tutte le ipotesi enunciate per la $v(x)$ nel terema II. Ciò segue da un risultato da me recentemente stabilito [5], tenuto conto del fatto che riesce per ipotesi $\mathfrak{M}[v(x)] \in L^{(p)}$.

Alla funzione $v(x)+v_1(x)$ è dunque applicabile la formula di GREEN nella quale si può scegliere come funzione $z(y)$ la soluzione fondamentale principale $G(\xi, y)$ considerata per $y \in T$, $\xi \in \complement T$. Osservando allora che riesce $\mathfrak{M}[v(x) + v_1(x)] = 0$ in $T - \mathfrak{F}T$, si trova:

$$\int_{\mathfrak{F}\Gamma} \{ G(\xi, y)\, \mathfrak{s}[v(y) + v_1(y)] - [v(y) + v_1(y)]\, \mathfrak{D}_y [G(\xi, y)] \} d_y \sigma = 0$$

per $\xi \in \mathfrak{C}\,\mathrm{T}$.

Se ne trae, per il teorema d'inversione di Amerio, $v(x) + v_1(x) \in \Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$.

Dalla (6) segue quindi $w(x) \in \Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$ e con ciò è dimostrato il teorema I.

5. Passiamo ora a dimostrare il teorema II.

Cerchiamo una soluzione $u(x)$ che sia del tipo:

$$u(x) = u_0(x) + w_0(x) ,$$

dove

$$w_0(x) = \int_{\mathfrak{F}\Gamma} G(x, y)\, \zeta(y)\, d_y \sigma$$

ed $u_0(x)$ è una soluzione della (1) che su $\mathfrak{F}\mathrm{T}$ si riduca alla traccia della funzione

$$v(x) = \int_{\mathfrak{F}\mathrm{T}} [L(x, y) - G(x, y)]\, \zeta(y)\, d_y \sigma .$$

Per l'ipotesi del teorema II, dal teorema di Fichera discende $w_0(x) \in \Gamma^{(p)}(\mathfrak{M})$.

Il teorema II sarà dunque acquisito, riconducendosi al teorema I, quando si sia mostrato che $v(x)$ e di potenza $p^{m'}$ sommabile in T con le sue derivate prime e seconde. La cosa è ovvia per $v(x)$ e le sue derivate prime, sicchè tutto si riduce a dimostrare che la proprietà sussiste per le derivate seconde.

Ora ogni derivata seconda di $v(x)$, diciamo $D^2 v(x)$, in $\mathrm{T} - \mathfrak{F}\,\mathrm{T}$ è del tipo:

$$D^2 v(x) \int_{\mathfrak{F}\Gamma} K(x, y)\, \zeta(y)\, d_y \sigma ,$$

con

$$K(x, y) \quad O \quad x \quad y^{\lambda \; m}$$

Si ha pertanto, con un'applicazione della diseguaglianza di Schwarz-Hölder:

$$|D^2 v(x)|^p \leqq \int_{\mathfrak{S}T} |K(x,y)|^{\varepsilon p} |\zeta(y)|^p \, d\sigma \cdot \left(\int_{\mathfrak{S}T} |K(x,y)|^{\frac{(1-\varepsilon)p}{p-1}} \, d_y \sigma \right)^{p-1} .$$

Scelto dunque ε in modo che riesca:

$$\frac{m - p\,[\lambda - (p-1)/p]}{p\,(m-\lambda)} < \varepsilon < \frac{m}{p\,(m-\lambda)} ,$$

il nucleo $|K(x,y)|^{\frac{(1-\varepsilon)p}{p-1}}$ è sommabile rispetto ad y su $\mathfrak{S}T$ ed il suo integrale è una funzione continua di x, mentre il nucleo $|K(x,y)|^{\varepsilon p}$ è sommabile in T e l'integrale $\int_T |K(x,y)|^{\varepsilon p} \, dx$ è funzione continua di y in T.

Dopo di ciò si conclude, in forza dei noti teoremi di Tonelli e Fubini, all'asserità sommabilità delle $|D^2 v(x)|^p$ in T, sicchè il teorema II è dimostrato.

Notiamo che la condizione $\lambda > \dfrac{p-1}{p}$ interviene, nel precedente ragionamento concernente le derivate seconde, ad assicurare la compatibilità della diseguaglianza (7).

BIBLIOGRAFIA

[1] Amerio L. *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* Am. Journ. of Mathem., 69, (1947), pp. 447-489.

[2] Amerio L *Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - k u = 0$. Ricerche di Matem.. V (1956), pp. 58-96.

[3] Fichera G. *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* Ann. di Matem. pura e appl., 27 (1948) pag. 1-28.

[4] Fichera G. *Sull'esistenza e sul calcolo della soluzione dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, IV (1950), pp. 35-99.

[5] Greco D. *Nuove formole integrali di maggiorazione per le soluzioni delle equazioni ellittiche ed applicazioni alla teoria del potenziale.* Ricerche di Malem,. vol. V (1956), p. p. 126-149.

[6] Miranda C. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Ergebn. der Math., Springer, (1955).

Sull' alterazione di alcuni inclusi delle « argille scagliose » della provincia di Avellino

Nota del dott. **Vincenzo Minieri**, *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 7 aprile 1956)

Sunto. – Viene eseguito lo studio della particolare colorazione e dell' alterazione di alcuni inclusi che si rinvengono nelle « argille varicolori » di Rocchetta S. Antonio (Avellino) e si osserva come i pigmenti vari, in essi diffusi, possano ragionevolmente assumere il significato di « indicatori ambientali » ed essere pertanto connessi ad un peculiare ambiente di sedimentazione.

L' esecuzione di spettrogrammi di polvere con radiazioni Fe K consente di poter concludere che l' alterazione definitiva degli inclusi predetti conduce alla formazione di goethite e di limonite.

Premessa. — Il colore dei sedimenti è dovuto, com' è noto, alla presenza di elementi accessori ed è connesso alla quantità più o meno notevole di sostanza colorante, la quale talvolta si riduce però alla diffusione di un pigmento assai finemente suddiviso e distribuito con una certa uniformità in tutta la massa. Tale pigmento colorante, di natura mineralogica diversa, può originarsi sia da sostanze organiche, che da sostanze minerali: inorganica è, ad esempio, la provenienza di pigmenti colorati che rappresentano residui di minerali neri (taluni ossidi).

Il presente studio riguarda appunto l' origine ed il significato geologico e sedimentologico della particolare colorazione, che, nella gamma più varia, si riscontra in numerosi inclusi, noti sotto il nome di « caotici », che si rinvengono in quel complesso argilloso, conosciuto come formazione di *argille varicolori* o *scagliose*. Per lo studio predetto si è ravvisata l' opportunità di tener conto di alcune particolari sostanze coloranti, le quali, anzichè prendere parte concomitantemente alla sedimentazione di un certo tipo di roccia, si generano, in seno agli stessi sedimenti, in relazione a particolari condizioni ecologiche, che lasciano intravedere la peculiarità di un determinato ambiente di sedimentazione. Trattasi di elementi o sostanze che sono da interpretarsi come autigeni, anche se l' origine prima dei costituenti debba essere considerata allotigena, e, come vedremo, continentale.

Intendo riferirmi a quei minerali solforati i quali pigmentano talune rocce sedimentarie, e che, nel caso particolare in esame, si son rivelati

l' origine prima della colorazione acquisita, ma non sempre conservata per la successiva alterazione, dagli inclusi delle argille scagliose tipiche.

L' osservazione in posto di tale interessante fenomeno, che peraltro mi sembrava connesso per un complesso di caratteri litologici, fisici e chimici ad un ambiente particolare di deposizione, mi ha indotto a tentare d' inquadrare i vari aspetti del problema secondo una serie di logiche considerazioni, per cui non mi è parso inutile rendere note le presenti ricerche, allo scopo di portare un utile contributo alla conoscenza di problemi marginali di geologia sedimentaria.

Cenni geologici. — Prima di entrare nel merito della questione ed anche perchè è doveroso riconoscere qual' è stata l' origine di questo studio, riporterò quanto scrive il Masini [1]) a proposito delle argille varicolori: « La genesi dell' argilla scagliosa va cercata in calcari a grana sottile — in calcari marnosi cioè — i quali possono dare origine ad un' infinità di *facies* scistose. Dai calcari marnosi hanno origine scisti svariatissimi, di cui alcuni conservano il colore della roccia madre, mentre altri lo perdono e ne prendono uno acquisito ....., scisti neri, plumbei, compatti fino al punto di simulare lamine metalliche. La roccia madre di tutti questi scisti è insomma sempre un calcare argilloso. Perchè poi questo calcare dia origine quando ad una forma metamorfica e quando ad un' altra; perchè prevalga nelle zone più affaticate il colore bronzeo o nero .....; perchè si riduca ad uno scisto carbonioso; come possa acquisire colori diversi da quelli di origine; come tragga dai minerali pigmenti coloranti, non è sempre facile dirlo, ma sta il fatto che in natura tutti questi fenomeni avvengono ».

Così ancora il Sacco [2]): « Si venne infine a constatare che queste un pò misteriose formazioni delle argille scagliose non sono altro che depositi batiali-abissali, analoghi a quelli che si formano ora nelle grandi profondità marine, le cosiddette fosse oceaniche. Ad ogni modo è evidente che le argille grigie o rossigne dell' Appennino corrispondono al *Red clay* o *Red mud* o *Rotetieftseetone* delle attuali profondità oceaniche .... Inoltre in ambo i casi, trovansi noduli, arnioni, concrezioni o consimili accentramenti svariati, spesso siliciferi, di ossidi ed idrossidi di ferro e di manganese o di marcassite, di pirite ecc. ».

Son proprio queste le premesse fondamentali del presente studio ed i risultati cui sono pervenuto sembrano chiarire molti punti dell' interessante questione.

---

[1]) Masini R., *La zona delle argille scagliose i suoi fuochi e i suoi gas* (*Appennino settentrionale*) Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LXI. Roma, 1942.

[2]) Sacco F., *I problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e dell' Appennino.* Boll. R. Uff. Geol. d' Italia, vol. LIX, n. 3. Roma, 1934.

L' occasione di raccogliere il materiale litologico necessario alle analisi chimiche eseguite, mi fu offerta nel corso del rilevamento del F° 175 (Cerignola) affidato dal Servizio Geologico d' Italia all' Istituto di Geologia di Napoli, diretto dal prof. D' Erasmo. Potetti così osservare da vicino vaste superfici di quell' area coperta da sedimenti che nel loro complesso stratigrafico, orogenico, tettonico e litologico sono noti sotto il nome di formazione delle « argille scagliose », alle quali il Penta [1], attribuì il significato di « formazione alloctona nata per frane e scivolamenti sui pendii delle rughe orogeniche nel periodo che va dal Cretaceo superiore al Pliocene, e ricoprente vaste aree dell' Appennino ». Vale a dire, come a ragion veduta completa il Merla [2]), l' insieme argilloso, scaglioso, spesso variegato, a struttura caotica, nella cui massa argillosa fondamentale, si rinvengono inclusi eterogenei per composizione litologica e per età, delle più svariate dimensioni, disseminati in essa disugualmente e senza alcuna legge stratigrafica fondamentale, da essere ritenuti veri e propri «caotici». Si tratta di frammenti di rocce sedimentarie o anche ignee, di dimensioni assai minuti talvolta, che normalmente vengono detti « esotici » e per i quali non sempre è facile concludere se facciano parte integrante di tutta la massa o siano stati in essa trasportati durante lo scivolamento e le frane, iniziate probabilmente anche in regime sottomarino.

Il materiale esaminato, e cioè gli inclusi dalle tinte più varie ed i relativi prodotti di alterazione, disseminati caoticamente nella massa argillosa, è stato raccolto a successive riprese nella zona delle argille scagliose che dal paese di Rocchetta S. Antonio (Avellino) degradano verso il basso a ridosso della stazione ferroviaria della località predetta, giungendo, a poca distanza, lungo la sponda sinistra del fiume Ofanto, a contatto tettonico con le argille azzurre plioceniche, estesamente visibili nel taglio del fiume.

Si tratta particolarmente di frammenti di rocce sedimentarie di tutte le tinte, dal verde chiaro, al violaceo, al plumbeo, al rosso, al giallo, al grigio sino a nero brillante: tutta una gamma notevole di colorazioni, talune conservate nella tinta con cui furono acquisite, talune invece con tinte dovute all' alterazione esogena dei minerali o dei pigmenti, ai quali logicamente si può talvolta risalire.

La prima impressione, convalidata poi dalle analisi, fu quella di dover ammettere, per la maggioranza dei casi, la presenza di pigmenti coloranti rappresentati da solfuri metallici o da sostanze organiche carbonizzate, sostanze alle quali è dovuta anche la successiva e quasi uniforme altera-

[1]) Penta F., *Sulle argille scagliose*. Atti 42ª Riunione Soc. Ital. Progr. Sc. 1949. Roma, 1950.

[2]) Merla G., *Geologia dell' Appennino Settentrionale*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LXX. Roma, 1951.

zione dei frammenti, che si trasformano in noduli a nucleo colorato in giallo e fasciato tutto intorno di rosso cupo.

E' noto d'altronde che in alcuni bacini di sedimentazione si originano, per condizioni chimico-fisiche particolari, composti del ferro allo stato di solfuri e bisolfuri, ai quali si associano sovente quelli di manganese, indicati da Twenhofel (*Treatise on sedimentation*, 1932) con i nomi di « melnikovite » e « idrotroilite » [1]), fasi minerali assai instabili, il cui destino è quello di condurre alla formazione di marcasite o di pirrotina, e più raramente di pirite.

Allorchè interviene la diagenesi, o come nel caso delle argille scagliose le forze orogeniche e successivamente quelle di sollecitazione dinamica che ancora oggi, dalla loro formazione, interessano quei sedimenti sospinti nell'ambiente aereo da quello marino, i pigmenti solforati si trasformano e si alterano, insieme con i frammenti di roccia nei quali erano inclusi, e solo raramente è consentito poterli individuare così come essi si sono originati.

E' opportuno poi porre in risalto il fatto che, come il colore rosso dei sedimenti pelagici [1]) è stato molto genialmente interpretato come avente il significato di « indicatore stratigrafico », essendo legato al ferro dilavato dalle geoanticlinali decalcificate e sedimentato nei fondi marini, così i pigmenti neri, plumbei, grigi, grigio-scuri, violacei dei solfuri di quell'elemento e subordinatemente del manganese, possono, in tesi generale, assumere il significato di « indicatori ambientali » di sedimentazione. E ciò naturalmente anche in relazione ad un complesso di circostanze e dati, geologici e paleontologici, i quali concordano con le deduzioni che si possono ricavare da considerazioni geochimiche dei fatti osservati.

Le genesi dei solfuri, che pigmentano rocce sedimentarie in genere e gli inclusi delle argille varicolori in particolare, deve essere connessa ad un particolare ambiente riducente, nel quale si sedimentò il materiale che originò poi quei complessi argillosi caotici con i relativi inclusi di piccole dimensioni. Tale condizione ambientale dovette essere determinata da ragioni varie, quali potrebbero essere ad esempio la genesi di sostanze organiche per putrefazione di organismi, la presenza di microrganismi sottraenti ossigeno, la mancanza di correnti marine provenienti dalla superficie dei mari e pertanto alquanto ricche di ossigeno.

[2]) Edlmann L., *Osservazioni su taluni campioni di rocce carbonate di colore nero e grigio scuro.* Boll. Soc. Geol. It., vol. LX, n. 2-3. (1941). Roma, 1942.

[1]) Trevisan L., *Sul significato geologico del colore rosso nelle rocce sedimentarie marine.* Atti Soc. Tosc. di Sc. Natur., Processi Verbali. vol. XLIX, n. 1. Pisa, 1940.

In un ambiente così fatto dal punto di vista chimico-fisico, e che risponderebbe a fondi marini di notevole profondità, lontani dai continenti si accumularono i sedimenti argillosi, con i loro inclusi che ne fanno parte integrante, e insieme ad essi i colloidi d'idrossido di ferro, o i solfati di quell' elemento, provenienti appunto dalle lontane zone continentali. Il ferro potette essere ridotto quindi alla forma bivalente ed essere precipitato sotto forme, sia pure instabili, di vari solfuri ferrosi, sia per reazione con l' H_2S originato dalle sostanze organiche solforate, sia ridotto a solfuri dai solfati. Ed i solfuri avrebbero pigmentato, a preferenza, inclusi di relativa porosità, in prevalenza marnosi, come l' analisi chimica ha rivelato.

Ricerche chimiche. — Ho eseguito l' analisi chimica di alcuni inclusi più rappresentativi e che meglio si prestavano, per ricchezza di pigmento colorante, e per alterazione, ad indicazioni orientative per la spiegazione dei fatti osservati e per l' inquadramento del problema. Le ricerche sono state effettuate operando, con i comuni metodi analitici, su un grammo di sostanza. Insolubilizzata e pesata la silice, sono stati poi dosati gli altri cationi. L' H_2O è stata determinata secondo il metodo Penfield.

1. *Incluso pigmentato in nero violaceo* (tav. I, fig. 1):

Res. ins.	0.30
SiO_2	5.75
Al_2O_3	12.00
Fe_2O_3	48.75
CaO	15.70
MgO	tracce
CO_2	12.40
H_2O^-	1.85
H_2O^+	3.15
Totale	99.90

La roccia, che si rivela litologicamente come un' argilla marnosa, dà con HCl, lievissimo sviluppo di H_2S. Il residuo insolubile, nella percentuale del 0.30 % è costituito da scagliette fibrose lucenti: raccolto su filtro, lavato e seccato, si presenta con una tinta nera lucente a riflessi grigio scuri, alquanto untuoso al tatto; lascia una traccia nera su carta. Con ogni probalità si deve ascrivere a sostanze carboniose. Il pigmento colorante può pertanto attribuirsi a solfuri metallici misti a sostanza carboniosa. La roccia poi è parzialmente trasformata in goethite, come ha rivelato l'analisi röntgenografica (Tav. II).

2. *Incluso a forma di nodulo, a nucleo giallo, fasciato esternamente di rosso* (Tav. I, fig. 2).

	nucleo	parte esterna
SiO_2	21.40	21.98
Al_2O_3	13.22	13.40
Fe_2O_3	49.06	51.20
CaO	1.58	2.28
MgO	tracce	tracce
CO_2	1.25	1.70
H_2O^-	4.35	2.15
H_2O^+	9.45	7.05
Totale	100.31	99.76

Trattasi degli ultimi stadî di alterazione degli inclusi pigmentati dai solfuri metallici. Essa conduce, come mostrano le analisi e come confermano gli spettri delle polveri, alla formazione di limonite e di goethite, (Tav. II, figg. 1 e 2) cui si perviene, allorchè dopo la trasformazione dei solfuri nei due composti predetti, si accompagna una decalcificazione sempre più notevole, per azione delle acque carbonicate scorrenti in superficie.

3. *Incluso di colore grigio-verdino :*

SiO_2	19.50
Al_2O_3	7.24
Fe_2O_3	14.18
CaO	32.20
MgO	0.18
CO_2	25.85
H_2O^-	0.15
H_2O^+	0.85
Totale	100.15

La tinta di tale incluso è dovuta alla riduzione dei composti di ferro che, in condizioni diverse, avrebbero generato una colorazione rossa. E' noto difatti che quando la riduzione è completa, la roccia diventa interamente verde. Tale fatto potrebbe essere messo in relazione ad una deposizione verificatasi in un ambiente marino di notevole profondità, nel quale non si potevano avere che tendenze fortemente riduttrici.

4. *Incluso con dendriti di ossido idrato di manganese* (Tav. I, fig. 4):

SiO_2	75.32
Al_2O_3	1.40
Fe_2O_3	1.90
CaO	10.34
MgO	tracce
MnO	1.91
CO_2	8.05
H_2O^-	0.27
H_2O^+	1.24
Totale	100.43

Il campione è stato preso in considerazione allo scopo di individuare quali inclusi e con quali caratteri mineralogici possano essere connessi ad un deposito del manganese dalle soluzioni circolanti in superficie e quindi destinate a variare la composizione litologica primitiva di essi. L' analisi chimica e l' osservazione microscopica del materiale ha messo in risalto quanto in numerosi lavori ha brillantemente intravisto PIERUCCINI [1]). E cioè una graduale mineralizzazione dovuta a sostituzione del manganese alla silice allo stato di opale o di calcedonio con successiva minuta cristallizzazione dendritica.

Ricerche röntgenografiche. — Al fine di poter confermare i dati analitici ottenuti e nel contempo chiarire l' interpretazione ad essi connessa, sono state eseguite alcune ricerche con i raggi X nell' intento di ottenere alcuni spettri di polvere degli inclusi analizzati per via chimica e confrontarli successivamente con quelli dei minerali che l'analisi lasciava prevedere. I debyegrammi sono risultati corrispondenti a quelli della limonite e della goethite e pertanto si è potuta avere una valutazione più precisa dei risultati ottenuti analiticamente.

Le ricerche predette eseguite con camere di diametro mm 57.3 e 114.59, sono state effettuate nell' Istituto di Chimica industriale dell' Università di Napoli con la guida preziosa del prof. Riccardo SERSALE, al quale esprimo qui i sentimenti della mia più viva gratitudine.

Gli spettri eseguiti furono ottenuti con la radiazione Fe K; le diffrazioni più interessanti ai fini del presente studio rivelano la presenza dei minerali goethite e limonite, come del resto può visibilmente notarsi nella corrispondenza delle righe degli spettri della tavola II; i dati relativi al calcolo delle diffrazioni vengono inoltre riportati nelle tabelle 1 e 2.

1) PIERUCCINI R. . *Sulla diffusione del manganese in alcuni sedimenti calcareo-selciosi dell' Appennino settentrionale toscano.* Atti Soc. Toscana di Sc. Nat., Memorie, s. A, vol. LVIII, pp. 6-80. Pisa, 1951.

TABELLA I.

Distanze reticolari ed intensità relative per:

Goethite della Carinzia (Coll. Museo Geol. di Napoli)		Incluso n. 1 (Rocchetta S. Antonio)	
I rel	d Å	I rel	d Å
mf	3,326	mf	3,31
ff	3,016	ff	3,01
m	2,784	m	2,78
m	2,684	d	2,68
m	2,450	m	2,47
md	2,263	md	2,27
d	2,182	d	2,13
m	2,086	d	2,07
m	1,903	d	1,90
m	1,867	m	1,86
md	1,713	d	1,73
d	1,597	d	1,59

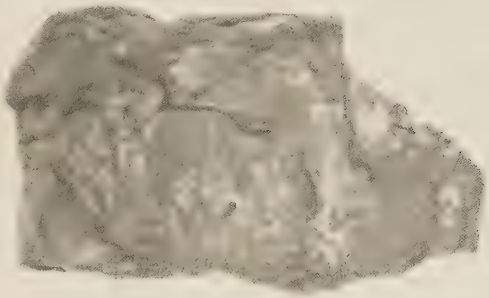
ff = fortissima; *m* = media; *d* = debole; *md* = media debole.

TABELLA II.

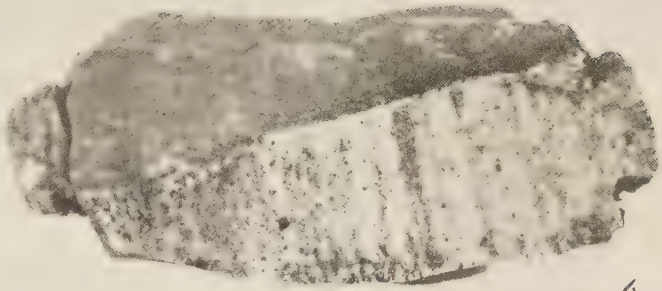
Distanze reticolari ed intensità relative per:

Limonite terrosa di Hannover (Coll. Museo Geol. di Napoli)		Incluso n. 2 (Rocchetta S. Antonio)	
I rel	d Å	I rel	d Å
d	5,023	d	5,015
d	4,651	d	4,607
f	4,244	f	4,230
m	3,395	m	3,353
f	2,704	f	2,698
d	2,593	d	2,584
f	2,455	f	2,453
m	2,258	m	2,253
m	1,718	m	1,719
d	1,606	d	1,599
md	1,509	d	1,505

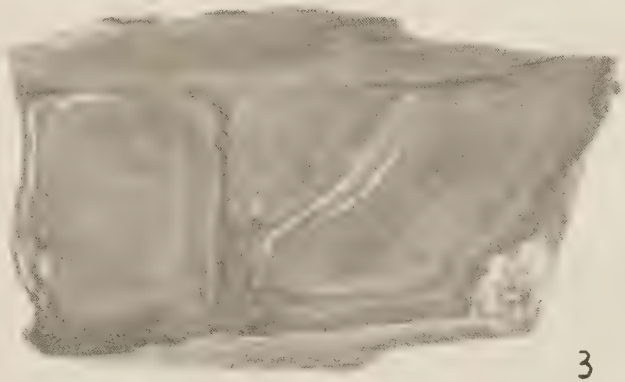
d = debole; *f* = forte; *m* = media; *md* = media debole.



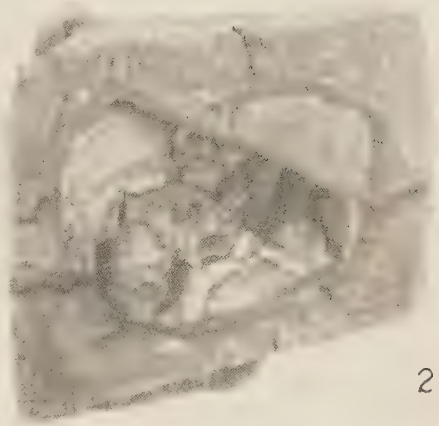
1



4



3



2

Inclusi delle « argille varicolori » e vari stadî di alterazione (1/2 della grand. natur.).

1. Incluso nero-violaceo per presenza di solfuri.
2. Alterazione in limonite (nucleo) e goethite (parte esterna).
3. Alterazione in goethite.
4. Mineralizzazione manganesifera in nodulo opalino.

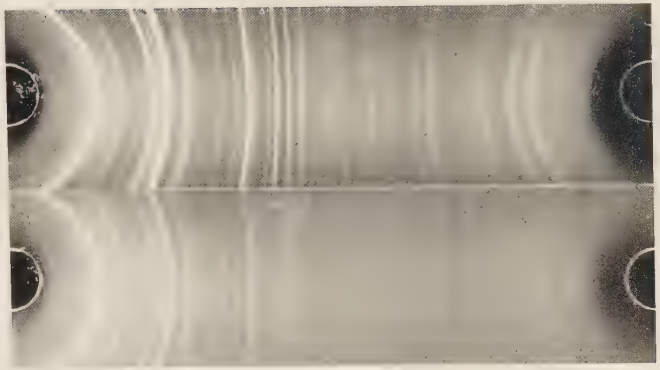


Fig. 1. — Diametro camera mm 57,3.

Fig. 2. — Diametro camera mm 114.59.
Rad. Fe K
a) limonite. *b*) incluso n. 2. *c*) goethite. *d*) incluso n. 1.

Conclusione. — Lo studio della particolare colorazione e dell' alterazione superficiale di alcuni inclusi che generalmente si osservano in quel complesso argilloso, caotico, noto sotto il nome di « argille scagliose » o « varicolori » ha consentito di trarre talune utili conclusioni in relazione all' ambiente di deposizione di quella formazione arealmente abbastanza estesa nella zona di Rocchetta S. Antonio (Avellino) e nell' area compresa nel Foglio 175 (Cerignola).

L' analisi litologica e chimica degli inclusi sedimentari ha permesso di stabilire che le tinte predominanti, nere, plumbee violacee, sono dovute alla presenza di peculiari pigmenti attribuibili a solfuri metallici del tipo idrotroilite, melnikovite ecc., ossia monosolfuri idrati di ferro, espressi dalla formula FeS. n H_2O colloidi idrofili e di colore nero. Subordinatamente a tali pigmenti si accompagnano tracce di sostanze carbonizzate, visibili nel residuo insolubile in HCl che lasciano una traccia nera su carta.

Venuti in superficie, dall' ambiente marino che con le argille li conteneva, tali inclusi, così pigmentati, si trasformano in noduli gialli nell' interno e rosso-scuri all' esterno: quest' ultimo stadio di alterazione conduce pertanto alla formazione di goethite e limonite come mostrano tanto le analisi chimiche che gli spettri di polvere ottenuti con radiazioni Fe K.

Le considerazioni esposte permettono di porre in risalto il fatto che in relazione alla diffusione ed alla genesi dei pigmenti predetti la sedimentazione del materiale che originò quelle formazioni, dovette avvenire in una geosinclinale di notevole profondità, in un ambiente marino cioè a carattere riducente, a pH alcalino (genesi della melnikovite), e pertanto batiale-abissale.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università, aprile 1956.

Il problema dell' asta carica di punta in campo elasto-plastico

Nota del dott. **Tullio Renzulli,** *presentata dal socio* **C. Miranda.**

[Adunanza del dì 16 giugno 1956]

Sunto. — Si conduce uno studio per la determinazione del carico critico di una trave in regime elasto-plastico, rimuovendo, alla maniera di Shanley, la ipotesi della invariabilità del carico assiale e ritrovando per altra via la formula del Kármán.

Si determina la deformata dell' asse della trave in corrispondenza dei carichi superiori a quello critico.

1) *Premessa.*

Lo studio della possibile esistenza di deformate secondarie di equilibrio per l'asta caricata di punta, pienamente risolto da Eulero nel dominio dell' elasticità lineare, ha dato luogo, al di fuori di tale dominio, a numerose e non sempre concordanti teorie. Alla primitiva ipotesi dello Engesser [2], che considera il modulo tangente E_t, definito come la tangente trigonometrica dell' angolo che la tangente geometrica al diagramma tensione-deformazione forma con l' asse delle ascisse, si contrappone la teoria del doppio modulo, anch' essa iniziata dall' Engesser [3] e messa a punto dal Kármán, e ben nota fin dal 1909. Poichè il diagramma tensione-deformazione della fig. 1 presenta, a partire dal punto P corrispondente ad una tensione σ maggiore della tensione di elasticità σ_e, diversa incli-

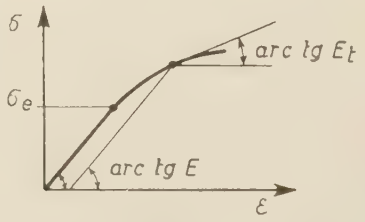


Fig. 1

nazione secondo che si considerino tensioni in aumento, ovvero in diminuzione, e stante l'ipotesi che il carico assiale si mantenga costante all'inflettersi della trave, e quindi che si destino nella sezione tensioni di segno

diverso, il comportamento del materiale non è caratterizzabile mediante un solo modulo, occorrendone due, uno E_t per le tensioni in aumento e l'altro E (pari a quello di elasticità), per le tensioni in diminuzione.

Il modulo ridotto

$$E_r = \frac{1}{2}\left(E\,I_1 + E_t\,I_2\right) \tag{1}$$

dove i simboli hanno il noto significato, e che per la sezione rettangolare $b \cdot h$ si riduce a

$$E_r = \frac{4\,E\,E_t}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2} \tag{1'}$$

viene così a caratterizzare la deformabilità della trave attraverso la relazione

$$\frac{1}{r} = -\frac{M}{E_r\,I} \tag{2}$$

ed il valore P_d del carico critico, ottenuto alla maniera euleriana, risulta

$$P_d = \frac{\pi^2\,E_r\,I}{l^2} \tag{3}$$

per l'asta cernierata agli estremi.

Questa teoria conduce ad un valore del carico per il quale la trave, pure se inflessa, è ancora in equilibrio; anzi si può dire che, nell'ordine di approssimazione [1]) nel quale il carico di Eulero è il massimo sotto il quale un'asta nel campo elastico è in equilibrio, il carico di Kármán è il massimo che la trave può sopportare.

Lo Shanley, partendo da queste considerazioni, ha fatto notare che, definito il carico critico come il più piccolo valore del carico al di sopra del quale sono possibili configurazioni secondarie di equilibrio, esso è calcolabile con la (1') attraverso il modulo ridotto solo se si postula la invarianza del carico all'aumentare della inflessione laterale: il carico di Kármán potrebbe non coincidere col carico critico qualora la trave si instabilizzasse per un valore più piccolo del carico esterno, pur potendo quest'ultimo, aumentando la deformazione, crescere fino al valore dato dalla (1'). A conferma dell'asserto lo Shanley considera uno schema ideale composto da due tronchi rigidi collegati da due pendoli di materiale di-

[1]) Ritenendo valida cioè la posizione approssimativa $\frac{1}{r} = \frac{d^2 v}{d z^2}$ al posto di quella esatta

$$\frac{1}{r} = \frac{v''}{\left(1 + v'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

versamente reagente a trazione od a compressione (fig. 2); la inflessione laterale è dovuta alla diversa deformazione dei due pendolini: prendendo come parametro la freccia d l'autore trova il valore del carico assiale P ad essa corrispondente: per $d = 0$, cioè in corrispondenza dell'inizio dell'inflessione laterale, si ritrova il valore del carico corrispondente a tensioni in aumento in ambedue i pendoli (comportamento secondo Engesser); per $d = \infty$ invece si ha un carico corrispondente al funzionamento a doppio modulo, cioè si hanno tensioni in aumento in uno dei pendoli ed in diminuzione nell'altro (comportamento secondo Kármán).

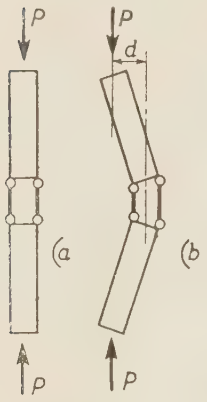


Fig. 2

Estrapolando questo risultato lo Shanley afferma che il carico critico è da calcolarsi in base al modulo tangente, attingendo esso il valore di Kármán soltanto a deformazione avvenuta; estrapolazione arbitraria poichè la sezione di una trave presenta una distribuzione di forze elementari interne variabile con continuità e ben difficilmente assimilabile alle due forze concentrate trasmesse dal doppio pendolo. Pertanto lo schema della fig. 2 pur nell'apparente verosimiglianza alla realtà fisica [1]), non può portare ad una indagine convincente.

La risposta definitiva può solo attendersi da una più rigorosa trattazione analitica del problema che, impostata dal Franciosi [7] [8], è qui portata a termine.

Il valore critico del carico risulta essere quello del Kármán.

2) *Le equazioni fondamentali.*

Si prende in esame la trave della fig. 3, a sezione rettangolare $b \cdot h$ costante, caricata assialmente dalla forza P eccedente di ΔP il valore del carico critico P_d

$$P = P_d + \Delta P .$$

La generica sezione S, che si sposta in S' a causa della inflessione laterale, presenta un diagramma di tensioni normali che ha l'andamento della fig. 3*b* o quello della fig. 3*c*, secondo che la eccentricità λ

$$\lambda = \frac{M}{\Delta P} = \frac{Pv}{P_d + \Delta P}$$

risulti minore o maggiore del raggio del nocciolo.

[1]) Verosimiglianza che ha indotto lo stesso Kármán a dare ragione allo Shanley indicando la irreversibilità del fenomeno come giustifica della discrepanza dei risultati.

L' ordinata $\sigma_o = P_d/A$, dove A è l' area della sezione, rappresenta il valore costante della σ che si ha in ogni sezione per $\Delta P = 0$.

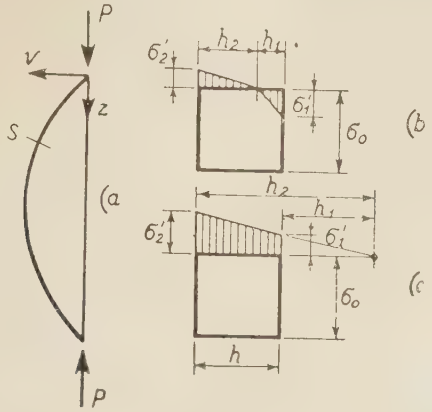


Fig. 3

Si pone:

E = modulo di elasticità

E_t = modulo tangente

$$\eta = h_2/h \qquad \alpha = \frac{E}{E} \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1) \qquad k = \frac{1}{\alpha} \ ;$$

si ha, da considerazioni di equilibrio, [6] [7]:

per $\eta_1 \leqq 1$ $\qquad \sigma'_2 = \sigma'_1 \dfrac{h_2}{h_1 \, k}$

$$(3) \begin{cases} \Delta P = \dfrac{b}{2} (\sigma'_2 h_2 - \sigma'_1 h_1) = b \, h \, \sigma'_2 \left(\eta - k \, \dfrac{1 - 2\,\eta - \eta^2}{\eta}\right) = \\ \qquad = \dfrac{b \, h \, \sigma'_2}{2} \, \dfrac{-\eta^2 (k-1) + 2\,\eta\, k - k}{\eta} \\ M = \dfrac{\sigma'_1 \, b \, h_1}{2} \left(\dfrac{h}{2} - \dfrac{h_1}{3}\right) + \dfrac{\sigma'_2 \, b \, h_2}{2} \left(\dfrac{h}{2} - \dfrac{h_2}{3}\right) = \\ \qquad = \dfrac{b \, h^2 \, \sigma'_2}{12} \, \dfrac{2\,\eta^3 (k-1) - 3\eta^2 (k-1) + k}{\eta} \\ \lambda = \dfrac{M}{\Delta P} = \dfrac{h}{6} \, \dfrac{2\,\eta_1^3 (k-1) - 3\,\eta_1^2 (k-1) + k}{-\eta^2 (k-1) + 2\,\eta\, k - k} \end{cases}$$

per $\eta \geqq 1$ $\qquad \sigma'_2 = \sigma'_1 \dfrac{\eta}{\eta - 1}$

$$(3') \begin{cases} \Delta P = \dfrac{b\ h\ \sigma'_2}{2} \dfrac{2\ \eta - 1}{\eta} \\ M = \dfrac{b\ h^2\ \sigma'_2}{12} \dfrac{1}{\eta} \\ \lambda = \dfrac{h}{6} \dfrac{1}{2\ \eta - 1} \end{cases}.$$

Si ha inoltre:

$$(4) \qquad \frac{1}{r} = -\frac{\varepsilon_2}{h_2} = -\frac{1}{h} \frac{\sigma'_2}{E_t\ \eta}.$$

Dalle (3) (4) e (3') (4) si ricavano i due sistemi di equazioni che reggono il problema, il primo valido per $\eta \leqq 1$, il secondo per $\eta \geqq 1$:

$$(5) \begin{cases} \dfrac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} + P v \dfrac{12}{E_t\ b\ h^3} \dfrac{1}{2\ \eta^3 (k-1) - 3\ \eta^2 (k-1) + k} = 0 \\ \dfrac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} + \Delta P \dfrac{2}{E_t\ b\ h^2} \dfrac{1}{-\eta^2 (k-1) + 2\ \eta\ k - k} = 0 \\ \dfrac{P\ v}{\Delta P} = \dfrac{h}{6} \dfrac{2\ \eta^3 (k-1) - 3\ \eta^2 (k-1) + k}{-\eta^2 (k-1) + 2\ \eta\ k - k} = 0 \qquad \eta \leqq 1 \end{cases}$$

$$(5') \begin{cases} \dfrac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} + P\ v \dfrac{12}{E_t\ b\ h^3} = 0 \\ \dfrac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} + \Delta P \dfrac{2}{E_t\ b\ h^2} \dfrac{1}{2\ \eta - 1} = 0 \\ \dfrac{P\ v}{\Delta P} = \dfrac{h}{6} \dfrac{1}{2\ \eta - 1} \qquad \eta \geqq 1 . \end{cases}$$

Nei due sistemi (5) e (5'), due soltanto delle tre equazioni sono indipendenti. Poichè la $(5)_3$ e la $(5')_3$ permettono di ricavare la η come funzione della v, sostituendo nelle altre equazioni (5) e (5') rispettivamente i due sistemi possono porsi nella forma

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\varphi\ (v, v')\ v'' + Pv = 0 \\ &\psi\ (v, v')\ v'' + P - P_a = 0 \end{aligned}$$

dove $\varphi\ (v, v')$ e $\psi\ (v, v')$ hanno le seguenti espressioni

$$\varphi\ (v, v') = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+v'^2)^{3/2}}\ \dfrac{E_t\ bh^3}{12}\ [2\eta^3\ (k-1) - 3\eta^2\ (k-1) + k] & \text{per } \eta \leqq 1 \\ \dfrac{1}{(1+v'^2)^{3/2}}\ \dfrac{E_t\ bh^3}{12} & \text{per } \eta \geqq 1 \end{cases}$$

(7)

$$\psi\ (v, v') = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+v'^2)^{3/2}}\ \dfrac{E_t\ bh^2}{2}\ [-\eta^2\ (k-1) + 2\eta\ k - k] & \text{per } \eta \leqq 1 \\ \dfrac{1}{(1+v'^2)^{3/2}}\ \dfrac{E_t\ bh^2}{2}\ (2\eta - 1)\ . & \text{per } \eta \geqq 1 \end{cases}$$

3) *Determinazione del carico critico.*

Ammessa l' esistenza di punti di diramazione, per $P > P_d$ e compreso in un intorno sufficientemente piccolo di P_d le (6) devono essere soddisfatte da una funzione $\bar{v}$ e da una variata $\bar{v} + \delta v$ per uno stesso valore di P. Si può scrivere di conseguenza:

$$\begin{cases} \varphi\ (\bar{v}, \bar{v}')\ \bar{v}'' + P\bar{v} = 0 \\ \varphi\ (\bar{v} + \delta\ v,\ v' + \delta\ v')\ (\bar{v}'' + \delta\ v'') + P\ (\bar{v} + \delta\ v) = 0 \\ \psi\ (\bar{v}, \bar{v}')\ \bar{v}'' + P - P_d = 0 \\ \psi\ (\bar{v} + \delta\ v,\ \bar{v}' + \delta\ v')\ (\bar{v}'' + \delta v'') + P - P_d = 0\ . \end{cases}$$

Dalla $(8)_2$ trascurando infinitesimi di ordine superiore, si ha:

$$\varphi\ (\bar{v}, \bar{v}')\ \bar{v}'' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{\substack{v=\bar{v} \\ v'=\bar{v}'}} \delta v \cdot \bar{v}'' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v'}\right)_{\substack{v=\bar{v} \\ v'=\bar{v}'}} \delta v' \cdot \bar{v}'' + \varphi\ (\bar{v}, \bar{v}')\ \delta v'' + P\ \bar{v} + P\delta v = 0$$

e tenendo conto della $(8)_1$:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{\substack{v=\bar{v} \\ v'=\bar{v}'}} \cdot \delta\ v \cdot \bar{v}'' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v'}\right)_{\substack{v=\bar{v} \\ v'=\bar{v}'}} \delta v' \cdot \bar{v}'' + \varphi\ (\bar{v}, \bar{v}')\ \delta\ v'' + P\ \delta\ v = 0\ .$$

Poichè $\bar{v} = \bar{v}'' = 0$, facendo tendere P a P_d si ha:

$$\varphi\ (0, 0)\ \delta\ v'' + P_d\ \delta\ v = 0 \text{ (9) con le condizioni ai limiti}$$

$$\delta\ v = 0 \text{ per } z = 0 \quad \text{e} \quad z = l\ .$$

Il più basso degli autovalori della (9) è il cercato carico critico. Esso

è calcolabile solo dopo aver precisato la espressione della $\varphi\ (0, 0)$, cosa possibile operando sulla $(8)_4$. Da essa si ha, trascurando infinitesimi di ordine superiore

$$\psi\ (\bar{r}, \bar{r}')\cdot\bar{r}'' + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{\substack{r=\bar{r}\\ r'=\bar{r}'}} \delta r\cdot\bar{r}'' + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r'}\right)_{\substack{r=\bar{r}\\ r'=\bar{r}'}} \delta r'\cdot\bar{r}'' \qquad \psi\ (\bar{r}, \bar{r}')\,\delta r'' + P - P_a = 0$$

Ricordando la $(8)_3$, si ha ancora

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{\substack{r=\bar{r}\\ r'=\bar{r}'}} \delta r\cdot\bar{r}'' + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r'}\right)_{\substack{r=\bar{r}\\ r'=\bar{r}'}} \delta r'\cdot\bar{r}'' + \psi\ (\bar{r}, \bar{r}')\,\delta r'' = 0 \quad .$$

Poichè $\bar{v} = \bar{r}'' = 0$, si ottiene:

$$\psi\ (0, 0)\cdot\delta v'' = 0 \quad . \tag{10}$$

La relazione precedente è soddisfatta per $\delta v'' = 0$ cioè per δv variabile con legge lineare: tenendo conto che vale zero agli estremi essa è allora identicamente nulla e si ricade nella soluzione $v = 0$; oppure per

$$\psi\ (0, 0) = 0 \quad . \tag{11}$$

Ricordando le (7) si nota che di esse la quarta non è compatibile con la (11), mentre le terza lo è. Si ricava facilmente

$$[\eta\ (v)]_{v=o} = cost = \eta_o = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \tag{12}$$

$$\begin{cases} [h_2\ (v)]_{v=o} = cost = h^o_2 = h\ \dfrac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \\ [h_1\ v)]_{v=o} = cost = h^o_1 = h\ \dfrac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \quad . \end{cases} \tag{13}$$

Si noti bene che, come ha rilevato il Franciosi [7] [8], η vale ∞, per $z = 0$ e $z = l$, qualunque sia Δ P, come appare della $(3')_2$ considerando che in dette sezioni è sempre $M = 0$; questo fatto, non è in contraddizione con la (12), poichè per $P = P_a$ può risultare η_o funzione non continua di z.

Il diagramma della η_o in funzione di z è quello della figura 4.

Sostituendo il valore di η_o dato dalla (12) nella (9), si ha:

$$\delta\ v'' + P\,\delta\ v\ \frac{12}{E_t\ b\ h^3}\ \frac{1}{2\ \eta_o^3\ (k-1) - 3\ \eta_o^2\ (k-1) + k} = 0$$

e con facili sviluppi

$$\delta v'' + P\,\delta v \left(\frac{12}{E_t\, b\, h^3} - \frac{(1+\sqrt{k})^2}{4\,k} \right) = 0$$

da cui, ricordando che $k = \dfrac{E}{E_t}$

$$\delta v'' + \frac{P\,\delta v}{I} \cdot \frac{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2}{4\,E\,E_t} = 0 \,. \tag{14}$$

La (14) è la equazione del Kármán; si ritrova pertanto la espressione del carico critico (1').

E' interessante rilevare che la (14) è stata ricavata prendendo l'espressione esatta della curvatura; il risultato non cambia ove si consideri la

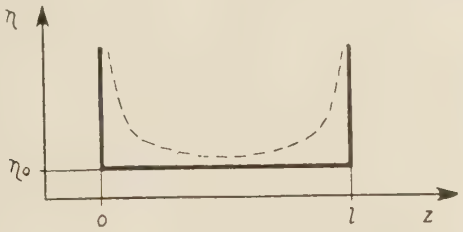


Fig. 4

curvatura pari alla derivata seconda, stante il valore della funzione ψ nel punto (0, 0).

Il risultato era prevedibile, poichè per deformazioni piccolissime è trascurabile rispetto ad 1 la quantità v'^2, ed è già stato messo in luce dal Galli [1].

4. *Determinazione della deformata.*

La determinazione della deformata, assegnato ΔP, va condotta considerando separatamente i tratti di trave: quelli per i quali risulta $\eta_i > 1$ (in prossimità degli appoggi), quello per il quale è invece $\eta_i < 1$ (contenente la sezione di mezzeria): risultando η_i funzione continua di P, come appare dalle (5) e (5'), e poichè per $P = P_a$ è $\eta = \eta_o = \dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$ almeno per ΔP abbastanza piccolo la η_i risulta abbastanza prossima ad η_o da risultare minore di 1. La presenza di tratti per l quali è $\eta_i > 1$ è giustificata dal fatto che per $z = 0$ è $z = l$ è $\eta_i = \infty$, e pertanto, stante la con-

tinuità di η rapporto a z, la η non può che assumere tutti i valori compresi tra 1 ed ∞.

La integrazione delle (5') non presenta particolari difficoltà specialmente ove si sostituisca la derivata seconda dalla v al posto della curvatura, nel quale caso si ha per $v(z)$ una sinusoide.

Le (5) presentano invece difficoltà non superabili senza qualche compromesso: si considera pertanto ΔP tanto piccolo da poter anche qui considerare l' espressione approssimata della curvatura; inoltre, facendo particolare riferimento all' acciaio, si considera un diagramme $\sigma - \varepsilon$ trilatero, dove per il tratto che va dalla σ di elasticità a quella di snervamento risulta α non molto discoso da 1; questo caso presenta notevoli semplificazioni rispetto al caso generale, e viene trattato a parte.

a) Caso di α prossimo ad 1.

Con riferimento al tratto centrale della trave per il quale è $\eta < 1$, si prendono in esame le (5) che qui si trascrivono introducendo il parametro $\alpha = 1/k$

$$(15)\quad \begin{cases} v'' + P\,v\,\dfrac{12}{E\,b\,h^3}\,\dfrac{1}{2\eta^3(1-\alpha) - 3\eta^2(1-\alpha) + 1} = 0 \\ v'' + \Delta P\,\dfrac{2}{E\,b\,h^2}\,\dfrac{1}{-\eta^2(1-\alpha) + 2\eta - 1} = 0 \\ \dfrac{P\,v}{\Delta P} = \dfrac{h}{6}\,\dfrac{2\eta^3(1-\alpha) - 3\eta^2(1-\alpha) + 1}{-\eta^2(1-\alpha) + 2\eta - 1} \end{cases}.$$

Eseguendo la divisione dei due polinomi a secondo membro della $(15)_3$ si ha:

$$\frac{P\,v}{\Delta P} = \frac{h}{6}\left[-2\eta - \frac{1+3\alpha}{1-\alpha} + \alpha\,\frac{\dfrac{8}{1-\alpha}\,\eta - \dfrac{4}{1-\alpha}}{-\eta^2(1-\alpha) + 2\eta - 1} \right]$$

e con facili sviluppi:

$$(16)\quad \frac{P\,v}{\Delta P} = \frac{h}{6}\left[-2\eta - \frac{1+3\alpha}{1-\alpha} + \frac{2\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\eta - \dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}} + \right.$$

$$\left. - \frac{2\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\eta - \dfrac{1}{1-\sqrt{\alpha}}} \right].$$

Posto

$$(17)\quad \begin{cases} f(\eta) = -2\eta - \dfrac{1+3\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \dfrac{1}{\eta - \dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}} + \\ \qquad - \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})^2} \dfrac{1}{\eta - \dfrac{1}{1-\sqrt{\alpha}}} \\ g(\eta) = - \dfrac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} + \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \dfrac{1}{\eta - \dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}} \end{cases}$$

si vuol dimostrare che, per α abbastanza vicino all'unità, al secondo membro della (16) si può sostituire la f con la g.

Infatti ponendo

$$\lambda(\eta) = -2\eta - \frac{1+3\alpha}{1-\alpha} - \frac{2\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})^2} \frac{1}{\eta - \dfrac{1}{1-\sqrt{\alpha}}}$$

si ha:

$$(18)\quad \lambda\left(\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right) = -2\,\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\ ; \quad \lambda(1) = -\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\ .$$

La $\lambda(\eta)$ è inoltre una funzione crescente di η in tutto l'intervallo $\dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$, 1, come si rileva dal fatto che l'equazione:

$$\frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} = -2 + \frac{2\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})^2} \left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^{-2} = 0$$

equivalente all'altra

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})^2} = \left(\eta - \frac{1}{1-\sqrt{\alpha}}\right)^2$$

ha le radici $\dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{1}{1-\sqrt{\alpha}}$ esterne all'intervallo suddetto.

Dalle (17) si ha:

$$g = f + [\lambda(1) - \lambda(\eta)]\ .$$

L'errore che si commette sostituendo la g alla f vale dunque $\lambda(1) - \lambda(\eta)$ e, risultando $\lambda(\eta)$ funzione crescente di η, è maggiorato dalla quantità $\lambda(1) - \lambda\left(\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)$.

E' immediato constatare attraverso le (18) che detto errore tende a zero quando α tende ad uno; e poichè inoltre risulta $\lim_{\alpha \to 1} g = 2\frac{1}{\eta - 1/2} \neq 0$, risulta

$\lim_{\alpha \to 1} \frac{f-g}{g} = 0$. Resta pertanto dimostrata la possibilità di considerare, per α prossimo ad uno, al posto della (16) l'equazione:

$$(19) \qquad \frac{Pv}{\Delta P} = \frac{h}{6}\left[-\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} + \frac{2\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}}\right]$$

da cui differenziando:

$$(20) \qquad dv = -\frac{\Delta P}{P}\,\frac{h}{3}\,\frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

Dalla (15_2) si ha inoltre

$$(21) \quad v''v'dz - \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{\Delta P^2}{P}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{E\,b\,h}\,\frac{1}{\left(\eta_1 - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\frac{d\eta}{-\eta_1^2(1-\alpha)+2\eta_1-1} = 0.$$

Con i noti metodi:

$$\frac{1}{-\eta_1^2(1-\alpha)+2\eta_1-1} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\eta - \frac{1}{1-\sqrt{\alpha}}} = f'.$$

Analogamente a quanto già fatto prima, alla funzione f' si vuole sostituire per α prossimo ad 1, la $g' = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}}$.

Introducendo il parametro t

$$(22) \qquad t = \frac{\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}}{1 - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}}$$

che varia da 0 ad 1 variando η da $\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$ ad 1, si ha:

$$f' = \frac{1}{2}\,\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1-\sqrt{\alpha}}{t - t\sqrt{\alpha} - 2}\right)$$

$$f' - g' = -\frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{1}{t - t\sqrt{\alpha} - 2}$$

e quindi

$$(22')\quad \lim_{\alpha\to 1}\frac{f'-g'}{f'} = \lim_{\alpha\to 1} -(1-\sqrt{\alpha})\,\frac{\frac{1}{t - t\sqrt{\alpha} - 2}}{\frac{1}{t} - \frac{1-\sqrt{\alpha}}{t - t\sqrt{\alpha} - 2}} = \lim_{\alpha\to 1}(1-\sqrt{\alpha})\,\frac{t}{2} = 0$$

qualunque sia il valore di t.

Da quanto sopra segue la nuova espressione per la (21)

$$(21')\quad \frac{1}{2}\,d\,(v'^2) = \frac{1}{3}\,\frac{\Delta P^2}{P}\,\frac{1}{E\,b\,h}\,\frac{1}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{d\,\eta}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^3}.$$

Integrando ed indicando con K_1 la costante d'integrazione:

$$(23)\quad v'^2 = -\frac{1}{3}\,\frac{\Delta P^2}{PEbh}\,\frac{1}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2} + 2\,K_1$$

da cui, tenendo conto della (19)

$$v' = \sqrt{-\frac{1}{12}\,\frac{\Delta P^2}{P}\,\frac{1}{E\,b\,h}\,\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\alpha}\left(\frac{6}{h}\,\frac{P\,v}{\Delta P} + \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2 + 2\,K_1}$$

e quindi, indicando con K_2 una seconda costante;

$$(24)\quad v = \frac{h}{6}\,\frac{\Delta P}{P}\left\{\sqrt{\frac{24\,K_1\,P\,E\,b\,h\,\alpha}{\Delta P\,(1+\sqrt{\alpha})}}\,\mathrm{sen}\left[(z+K_2)\,\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\,\tau\right] - \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right\}$$

dove:

$$\tau = \sqrt{\frac{P}{E\,I}}\,.$$

La espressione (24) è valida per $\eta < 1$ e per α prossimo ad 1. Per $\eta > 1$ si ha, dalla $(5')_1$, indicando con K_3 una costante:

$$v = K_3 \operatorname{sen} \frac{\tau z}{\sqrt{\alpha}} . \tag{25}$$

Le tre costanti K_1, K_2 e K_3 si determinano tenendo presente che per $z = l/2$ risulta $v' = 0$, e dalle condizioni di congruenza per $\eta = 1$, cioè per

$$v = \frac{h}{6} \frac{\Delta P}{P} .$$

La prima fornisce il valore di K_2

$$K_2 = \pi \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{E I}{P}} - \frac{l}{2} . \tag{26}$$

Dalla (25) si ha inoltre

$$v' = \frac{\tau}{\sqrt{\alpha}} K_3 \cos \frac{\tau z}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\tau}{\sqrt{\alpha}} K_3 \sqrt{1 - sen^2 \frac{\tau z}{\sqrt{\alpha}}} \text{ da cui } v'^2 = \frac{\tau^2}{\alpha} (K_3^2 - v^2). \tag{27}$$

Dalle (23) e (27) si trae, ponendo $X = \frac{6 P}{h \Delta P} K_3$

$$- \frac{1}{3} \frac{\Delta P^2}{P} \frac{1}{E b h \alpha} + 2 K_1 = \frac{\tau^2}{\alpha} K_3^2 \left(1 - \frac{1}{X^2}\right)$$

relazione dalla quale si ricava

$$\frac{6 K_1 P E b h \alpha}{\Delta P^2} = X^2 . \tag{28}$$

Dalle (24) e (25) si ha, per $\eta = 1$, tenendo conto della (28)

$$\frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}} \frac{1}{\tau} \operatorname{arc\ sen} \frac{1}{X} = \frac{l}{2} - \frac{\pi \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}} \frac{1}{\tau}$$

dalla quale si trae:

$$\frac{1}{X} = sen \left| \frac{l}{2} \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \tau - \frac{\pi \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \right| \tag{29}$$

e finalmente i valori delle altre due costanti

$$(30)\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{\Delta P^2}{P}\ \dfrac{1}{6\,E\,b\,h\,\alpha}\ X^2 \\ K_2 = \dfrac{\Delta P}{P}\ \dfrac{h}{6}\ X\ . \end{cases}$$

Le (26) e (30) risolvono il problema.

b) Caso di α generico.

Con la posizione (22) la (16) si scrive:

$$\frac{P v}{\Delta P} = \frac{h}{6}\left(-2\,t\ \frac{1-\alpha}{1+\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}} - \frac{1+3\alpha}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{t} - 2\,\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{t-t\sqrt{\alpha}-2}\right)$$

da cui si ha:

$$(31)\quad \frac{P v}{\Delta P} = \frac{h}{6}\left(-2\,t\ \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} - \frac{3-2\sqrt{\alpha}+3\alpha}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{t} + \right.$$

$$\left. - 2\ \frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{t-t\sqrt{\alpha}-2}\right).$$

Per $\Delta P = 0$, cioè per $P = P_d$, risulta $= \eta = \eta_o = \dfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$, cioè $t = 0$ (fig. 4).

Risultando η funzione continua di ΔP per ΔP abbastanza piccolo si può avere un diagramma di η vicino quanto si vuole a quello di η_o (linea tratteggiata della fig. 4).

Prendendo P in un intorno sufficientemente ristretto di P_d, si può rendere t prossimo quanto si vuole allo zero qualunque sia z, escluso che nei tratti adiacenti agli appoggi. Stante il fatto che l' ampiezza di questi tratti tende a zero per ΔP tendente a zero, si può considerare al posto della (31) la relazione [1]).

$$(32)\quad \frac{P v}{\Delta P} = \frac{h}{6}\left(-2\ \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{t}\right).$$

Dalla (32) differenziando

---

[1]) Si noti che la ipotesi di ΔP piccolo era già necessaria nel caso precedente per poter considerare l'espressione approssimata della curvatura; in questo caso ovviamente essa è più restrittiva.

$$(33) \qquad dv = -\frac{\Delta P}{P}\,\frac{h}{3}\,\frac{\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

Osservando che la (22') giustifica ancora, per α generico e t tendente a zero, la sostituzione della f' con la g', si arriva anche in questo caso alla relazione:

$$(34) \qquad v'' = -\Delta P\,\frac{1}{E\,b\,h^2}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)}\,.$$

Dalle (33) e (34)

$$v''\,v'\,dz = \frac{1}{3}\,\frac{\Delta P^2}{P}\,\frac{1}{E\,b\,h}\,\frac{1}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,.$$

Indicando con K_1 una costante di integrazione:

$$(35) \qquad v'^2 = -\frac{1}{3}\,\frac{\Delta P^2}{P}\,\frac{1}{E\,b\,h}\,\frac{1}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2} + 2K_1.$$

Dalle (32) e (35)

$$(36) \qquad v'^2 = -\frac{1}{12}\,\frac{\Delta P^2}{P}\,\frac{1}{E b h}\,\frac{1}{\alpha}\left(\frac{6\,P\,v}{h\,\Delta P} + 2\,\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2 + 2K_1\,.$$

Dalla (36), indicando con K_2 una seconda costante di integrazione, si trae:

$$(37) \qquad \frac{2\sqrt{\alpha}}{\tau}\,arc\ sen\left[\frac{\Delta P}{\sqrt{24\,K_1\,PE\,b h \alpha}}\left(\frac{6}{h}\,\frac{P\,v}{\Delta P} + 2\,\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right)\right] = z + K_2$$

ed infine:

$$(38) \qquad v = \frac{h}{6}\,\frac{\Delta P}{P}\left\{\frac{\sqrt{24\,K_1\,PE\,b\,h\,\alpha}}{\Delta P}\,sen\left[(z+K_2)\,\frac{\tau}{2\sqrt{\alpha}}\right] - 2\,\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right\}.$$

Le costanti si determinano in modo analogo a quanto già fatto nel caso precedente [1]). Per K_2 si ha immediatamente:

---

[1]) In linea meno esatta, stanti le ipotesi fatte, si potrebbe considerare la

$$(40) \qquad K_2 = \pi \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{E\,I}{P}} - \frac{l}{2} .$$

Dalle (27) e (35) e dalle (25) e (37) rispettivamente, risulta per $\eta = 1$, cioè per $v = \frac{h}{6}\frac{\Delta P}{P}$

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{12}\frac{\Delta P^2}{P}\frac{1}{E\,b\,h\,\alpha}\left(\frac{3-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right)^2 + 2\,K_1 = \frac{\tau^2}{\alpha}\left(K_3^2 - \frac{h^2}{36}\frac{\Delta P^2}{P^2}\right) \\ \frac{2\sqrt{\alpha}}{\tau}\ arc\ sen\left[\frac{\Delta P}{\sqrt{24\,K_1\,P\,E\,b\,h\,\alpha}}\frac{3-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right] - K_2 = \\ \qquad = \frac{\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\ arc\ sen\ \frac{h}{6}\frac{\Delta P}{P}\frac{1}{K_3} . \end{array} \right.$$

Dalla $(41)_1$ si trae:

$$2\,4\,K_1\,P\,E\,b\,h\,\alpha = \left(\frac{12\,P}{h}\,K_3\right)^2 + \frac{\Delta P^2}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,(5 - 14\sqrt{\alpha} - 3\,\alpha)$$

e sostituendo nella seconda:

$$(43) \qquad 2\ arc\ sen\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{12\,P\,K_3}{h\,\Delta P} + \frac{5-14\sqrt{\alpha}-3\,\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}}}\frac{3-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\right) +$$

$$- arc\ sen\ \frac{h}{6}\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{K_3}\,K_2\,\frac{\tau}{\sqrt{\alpha}} .$$

Ricavato dalla (43) il valore di K_3, sostituendo nella (42) si ricava il valore di K_1.

---

(38) valida lungo tutto la trave, e non soltanto per $\eta < 1$. In questo caso, rimanendo valida la (40), si ricava la costante K_1 imponendo la condizione

$v = 0$ = per $z = 0$, da cui:

$$(39) \qquad \frac{\sqrt{24\,K_1\,P\,E\,b\,h\,\alpha}}{\Delta P} = 2\,\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{sen\ K_2\,\frac{\tau}{2\sqrt{\alpha}}} .$$

5) *Esempio.*

Si considera una trave di sezione rettangolare 2×10 cm., di lunghezza 50 cm. Le caratteristiche del materiale sono

$E = 2 \times 10^6$ Kg/cmq $\qquad a = 0{,}9 \qquad \sigma_e = 2000$ Kg/cmq

Si ha

$$E_r = \frac{4\,E\,E_t}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2} = E \cdot 0{,}9476 \qquad I = 6{,}666 \text{ cm}^4$$

$$P_d = \frac{\pi^2\,E_t\,I}{l^2} = 49979 \text{ Kg.}$$

Sia $\Delta P = 1001$ Kg. quindi $P = 50.979$ Kg.

Risulta:

$$\sqrt{\frac{P}{E\,I}} = 0{,}06183 \text{ cm}^{-1} \qquad \sqrt{\frac{E\,I}{P}} = 16{,}1730 \text{ cm.}$$

$$K_2 = -0{,}273 \text{ cm.}$$

$$\frac{1}{X} = \text{sen } 36^\circ\,52' = 0{,}600$$

$$\frac{\sqrt{24\,K_1\,P\,E\,b\,h\,\alpha}}{\Delta P\,(1+\sqrt{\alpha})} = 1{,}7102$$

$$arc\ sen\ \frac{h}{6}\,\frac{\Delta P}{P}\,\frac{1}{K_3} = 0{,}6431 \text{ rad.}$$

$$(z)_{\eta=1} = 16{,}173 \cdot 0{,}6431 = 10{,}400 \text{ cm.}$$

$$\frac{h}{6}\,\frac{\Delta P}{P} = 0{,}02733 \text{ cm.}$$

$$\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} = 0{,}2617\,; \qquad \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{3\,P}{E\,b\,h^3}} = 0{,}06349 \text{ cm.}^{-1}$$

Le equazioni della linea elastica sono pertanto le seguenti:

per $\eta \geqq 1$

$$v = 0{,}04555\ sen\ (0{,}06183 \cdot z) \text{ cm.}$$

per $\eta \leqq 1$

$$v = 0{,}02733 \left\{ 1{,}7102 \; sen \left[0{,}06349 \; (z - 0{,}273) \right] - 0{,}02617 \right\} \text{ cm.}$$

Il grafico della v è in figura 5.

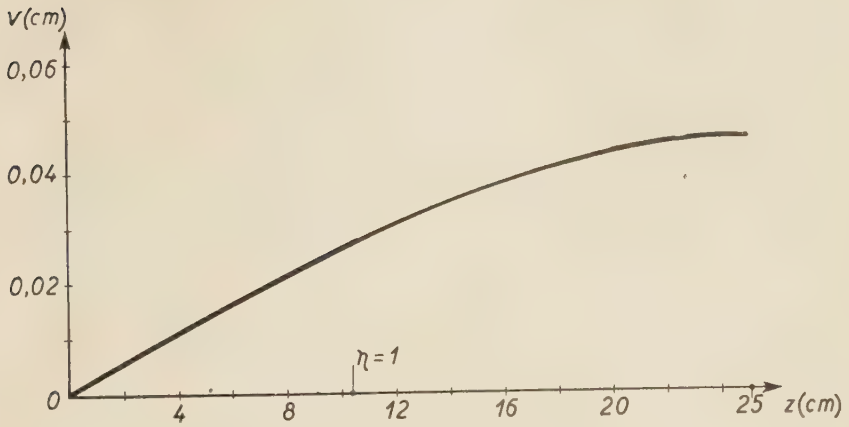


Fig. 5

La stessa trave abbia le stesse caratteristiche salvo $\alpha = 0{,}49$.

Risulta in questo caso:

$E_r = E \cdot 0{,}6782$

$P_d = 35{,}772$ Kg. Sia $\Delta P = 100$ kg. $P = 35872$ kg.; applicando la (40) si ha $K_2 = 0{,}03494$. Utilizzando la (39) si ha:

$$\frac{\sqrt{24 \; K_1 \; P \; E \; b \; h \; \alpha}}{\Delta P} = 272{,}37$$ che coincide praticamente con il valore esatto ricavato dalle (41).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Galli — *Scienza delle Costruzioni*. Vol. III, Pellerano, Napoli.

[2] F. Engesser — *Ueber die Kniekfestigkeit gerarder Stäbe*. Zs Arch. Ing. Ver. z. Hannover, v. 35, 1889.

[3] F. Engesser - *Ueber Knickfragen*: Schweiz· Banzitung, v. 26, 1895.

[4] Th. V. Karman — *Untersuchungen über Forshungsarb. a. d.* Geb. d. Ing. n. 81, 1909.

[5] F. R. Shanley — *The Column Paradox*, Journal of the aeronautical Sciences, v. 13, 1946.

[6] F. R. Shanley — *Inelastic Column theory.* Journal of the aeronautical Sciences, v. 14, 1947.

[7] V. Franciosi — *Il carico di punto critico in regime elastoplastico.* Rend. Acc. Sc. Fis e Mat. serie 4ª, vol. XX, Napoli, 1953.

[8] V. Franciosi — *Buckling in elasto-plastic range.* Proceedings of R. S. of Civil Engineers, ottobre 1954.

[9] I. Szabò — *Höhere Technische Mechanik.* p. 358, Berlino, Springer 1996.

Curve algebriche complete autoduali

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

[Adunanza del dì 3 novembre 1956]

Sunto. -- Si dimostra il teorema fondamentale per la caratterizzazione delle curve algebriche complete autoduali, e si calcola il carattere cuspidale ed il carattere singolare di una tale curva.

Premessa.

Assegnata nell'S_2 complesso una *curva luogo* c^n di ordine n e, conseguentemente, la *curva completa* $c^{n,m}$, costituita dalla data curva luogo e dalla *curva inviluppo*, di classe m, da essa determinata, trasformando per dualità la $C^{n,m}$ si ha una curva completa $C^{m,n}$, di ordine m e classe n. Nel caso particolare che sia $m = n$ questa seconda curva completa risulta dello stesso tipo della precedente. In tal caso la curva c^n, e la curva completa $C^{n,n}$ da essa determinata, si dirà *autoduale*.

Una conica irriducibile c^2, essendo di classe 2, è sempre autoduale. Per $n > 2$ la generica c^n non è autoduale, perchè è $m \neq n$. Si presenta allora il problema di caratterizzare, per $n > 2$, le curve c^n autoduali, e se ne esistono sempre qualunque sia $n > 2$. La risposta è affermativa ed è data dal seguente

Teorema fondamentale :

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva c^n *irriducibile, di ordine* n *e genere* p, *sia autoduale è che per* $n > 2$, *sia dotata di punti multipli, costituenti, nel loro insieme, singolarità equivalenti a* d *punti doppi nodali e* k *punti doppi cuspidali, con gl'interi non negativi* d *e* k *legati ad* n e p *dalle due equazioni :*

$$(I) \qquad d = \frac{(n-3)(n-2)}{2} - 3p$$

$$(II) \qquad k = n - 2 + 2p$$

1. *Caratterizzazione delle curve autoduali.*

Dalle formole di PLÜCKER

1ª $\quad m = n\,(n-1) - 2d - 3k$
2ª $\quad n = m\,(m-1) - 2t - 3i$
3ª $\quad i = 3n\,(n-2) - 6d - 8k$
4ª $\quad k = 3m\,(m-2) - 6t - 8i$

nell'ipotesi che sia $n \quad m$ si ricavano, dalle prime due o dalle ultime due rispettivamente, le due relazioni:

$$\begin{aligned} 2\,d + 3\,k &= 2\,t + 3\,i \\ 6\,d + 7\,k &\quad 6\,t + 7\,i. \end{aligned}$$

Da queste due relazioni segue che le due differenze $d - t$ e $k - i$ soddisfano alle due relazioni omogenee:

$$\begin{cases} 2\,(d-t) + 3\,(k-i) = 0 \\ 6\,(d-t) + 7\,(k-i) = 0 \end{cases}$$

e quindi, essendo il determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tali due differenze $d-t$ e $k-i$ devono essere nulle, cioè deve essere $d=t$ e $k=i$. Si ha perciò:

I) *Se una curva algebrica piana è autoduale, dalla relazione* $\mathrm{n} = \mathrm{m}$ *seguono di conseguenza le relazioni* $\mathrm{d} = \mathrm{t}$ *e* $\mathrm{k} = \mathrm{i}$.

Supponiamo ora che per una curva algebrica piana c^n sia $k = i$. Dalla relazione che lega i caratteri n, m, k ed i:

$$k - i = 3\,(n - m)$$

si deduce che se è $k = i$ risulta di conseguenza $n = m$, cioè la curva è autoduale, e perciò per la proposizione I) sarà pure $d = t$. Dunque:

II *Delle tre relazioni* $\mathrm{n} = \mathrm{m}$, $\mathrm{k} = \mathrm{i}$, $\mathrm{d} = \mathrm{t}$, *il verificarsi della prima o della seconda porta di conseguenza il verificarsi delle altre due.*

Si noti, invece, che quando si verifica la terza relazione $d = t$, non si può dedurre che si verificano di conseguenza nè la prima, nè la seconda. Come vedremo tale conseguenza non si ha per qualunque valore dell'intero $n > 2$, ma fanno eccezione i soli due casi $n = 4$ ed $n = 5$. La prima

eccezione è data dalla c^4 con $d = 2$, $k = 1$, $t = 2$, $i = 4$, $m = 5$ e quindi è $d = t$, $n \mp m$, $k \mp i$.

La seconda eccezione è data dalla c^5 con $d = 2$, $k = 4$, $t = 2$, $i = 4$, $m = 4$. Vedremo, invece, che esclusi questi due casi eccezionali dalla relazione $d = t$ si ricavano di conseguenza le relazioni $n = m$, e $k = i$.

La c^4 *e la* c^5, *che danno i due casi eccezionali, sono entrambe razionali e i caratteri dell'una sono eguali ai caratteri duali dell'altra.*

Per dimostrare quanto sopra si osservi che dalle due relazioni che danno il genere della curva:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d \quad k$$

$$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - t - i,$$

nell'ipotesi che sia $d = t$, si ricava la relazione

$$(n-1)(n-2) - 2k = (m-1)(m-2) - 2i.$$

Sottraendo da questa relazione la seguente (che si ricava per $d = t$ dalla relazione

$$\frac{1}{2}(n+3)\,n - d - k = \frac{1}{2}(m+3)\,m - t - i$$

si ricava la relazione (per $d = t$):

$$(n-1)(n-2) - (n-3)\,n = (m-1)(m-2) - (m-3)\,m$$

cioè

$$n^2 - 9n = m^2 - 9m.$$

Questa relazione oltre a verificarsi sempre per $n = m$, ammette le due soluzioni $n = 4$, $m = 5$, e $n = 5$ $m = 4$. Per tali valori i due membri della relazione assumono, in entrambi i casi, il minimo valore -20 che assume l'espressione $x^2 - 9x$ per x intero positivo. Invero per

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots \text{ è:}$$

$$x^2 - 9x = -8, -14, -18, -20, -20, -18, -14, -8, 0, 10, 22, 36, \ldots$$

Sicchè una curva che abbia $d = t$, senza essere autoduale, risponde ai soli due casi $n = 4$, $m = 5$ e $n = 5$, $m = 4$. Tali due curve esistono e sono le due curve razionali: *la* c^4 *con due punti doppi nodali ed uno cu-*

spidale e la c^5 *con due punti doppi nodali e 4 punti doppi cuspidali.*

Per calcolare i, si usi la 3ª formula di PLÜCHER

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8k$$

e si ha $i = 4$ per la c^4 e $i = 1$ per la c^5.

Per calcolare t, noti m, k ed i si può usare la quarta formula di PLÜCHER, che lega t a tali tre caratteri, e si ha $t = 2$ in entrambi i due casi quindi è $d = t$, come doveva risultare.

Raccogliendo si ha:

Le curve autoduali sono caratterizzate o dalla relazione m = n *o dalla relazione* k = i. *Nel caso* n *non eguale a* 4 o 5, *sono anche caratterizzate dalla relazione* d = t.

Esistono due sole curve non autoduali per le quali è d = t, *e sono la* c^4 *con* 2 *nodi ed una cuspide e la* c^4 *con* 2 *nodi e* 4 *cuspidi. Per tali due curve si hanno i caratteri:*

n	m	d	t	k	i	p
4	5	2	2	1	4	0
5	4	2	2	4	1	0

e sono l'una duale dell'altra.

Nota. Nel formulario del BERZOLARI (Cap. VII relativo alle quartiche piane) la c^4 con i sudetti caratteri è la terzultima del quadro, la seconda delle quattro di genere $p = 0$ (pag. 272).

Nello stesso quadro la c^4 *autoduale* è la terza fra quelle di genere $p=0$ con i caratteri $n = m = 4$, $d = t = 1$ $k = i = 2$. Un esempio di questo tipo lo dà pure una c^4 con un punto triplo con le tre tangenti infinitamente vicine, e quindi equivalente a tre punti doppi di cui uno nodale e due cuspidali.

2. *Curve autoduali di dato ordine.*

Dalle formole di PLÜCHER per una curva autoduale, e quindi con $n = m$, $k = i$, $d = t$, si ricava, sostituendo ad m, t ed i i caratteri n, d e k:

a) dalle prime due la relazione:

$$n = n(n-1) - 2d - 3k;$$

b) dalle ultime due la relazione:

$$k = 3n(n-2) - 6d - 8k$$

Queste due relazioni equivalgono entrambe all' unica relazione :

$$(*) \qquad 2d + 3k = n^2 - 2n$$

che lega i tre caratteri n, d e k di una curva autoduale.

Per determinare i *possibili caratteri* d e k *di una curva autoduale di dato ordine* n, occorre, quindi, determinare le soluzione in numeri interi non negativi, d, k dell' equazione (*) con n prefissato intero >1.

Per $n = 2$ il secondo membro della (*) è nullo e quindi si ha l' unica soluzione $d = 0$ $k = 0$ che risponde al caso della conica irriducibile, e quindi priva di punti multipli.

Per $n = 3$ la (*) dà l' equazione :

$$2d + 3k = 3$$

che dà l' unica soluzione $d = 0$, $k = 1$. Si ha perciò una sola cubica autoduale : la c^3 dotata di punto doppio cuspidale. Si noti che tale cubica è razionale.

Per $n = 4$ la (*) dà l' equazione :

$$2d + 3k = 8$$

che dà la sola soluzione $d = 1$, $k = 2$. Si ha perciò anche per $n = 4$ una curva autoduale razionale, con tre punti doppi di cui due cuspidali, ovvero (caso equivalente) con un punto triplo con le tre tangenti sovrapposte (o infinitamente vicine) e quindi equivalente a tre punti doppi di cui due cuspidali.

Per $n = 5$ la (*) dà l' equazione

$$2d + 3k = 15$$

che dà due soluzioni : $d = 0$, $k = 5$ e $d = 3$, $k = 3$. Nel primo caso si ha una c^5, di genere $p = 1$, con 5 punti doppi cuspidali. Nel secondo caso si ha una c^5, razionale, con 6 punti doppi di cui tre cuspidali, ovvero (caso equivalente) con un punto quadruplo con le quattro tangenti sovrapposte (o infinitamente vicine) e quindi equivalente a $\binom{4}{2} = 6$ punti doppi di cui $4 - 1 = 3$ cuspidali.

Per $n = 6$ la (*) dà l' equazione

$$2d + 3k = 24$$

che dà tre soluzioni : $d = 0$, $k = 8$; $d = 3$, $k = 6$; $d = 6$, $k = 4$, rispondenti a tre c^6 di genere 2,1 e 0, rispettivamente essendo $(6-1)(6-2) : 2 = 10$.

Anche qui nel caso della c^6 razionale, si noti il caso equivalente della c^6 con un punto quintuplo con le tangenti sovrapposte (o infinitamente vicine) e quindi equivalente a $\binom{5}{2} = 10$ punti doppi di cui $5 - 1 = 4$ cuspidali, cioè il caso della terza soluzione $d = 6$, $k = 4$.

Per $n = 7$ la (*) ci dà l'equazione:

$$2d + 3k = 35$$

e si hanno quattro soluzioni:

$$\begin{array}{lll} d = 1 & , \quad k = 11 & , \quad p = 3 \\ d = 4 & , \quad k = 9 & , \quad p = 2 \\ d = 7 & , \quad k = 7 & , \quad p = 1 \\ d = 10 & , \quad k = 5 & , \quad p = 0 \end{array}$$

Anche qui si verifica che l'ultima soluzione risponde al caso della curva razionale c^7 con un punto sestuplo a tangenti sovrapposte (o infinitamente vicine) e quindi equivalente a $\binom{6}{2} = 15$ punti doppi di cui $6 - 1 = 5$ cuspidali.

Per $n = 8$ si hanno le sei soluzioni

$$\begin{array}{lll} d = 0 & , \quad k = 16 & , \quad p = 5 \\ d = 3 & , \quad k = 14 & , \quad p = 4 \\ d = 6 & , \quad k = 12 & , \quad p = 3 \\ d = 9 & , \quad k = 10 & , \quad p = 2 \\ d = 12 & , \quad k = 8 & , \quad p = 1 \\ d = 15 & , \quad k = 6 & , \quad p = 0, \end{array}$$

con la osservazione che la soluzione, che risponde alla c^8 razionale, è data pure dalla c^8 con un punto 7-plo a tangenti sovrapposte (o infinitamente vicine) e quindi equivalente a $\binom{7}{2} = 21$ punti doppi di cui $7 - 1 = 6$ cuspidali.

Si noti esplicitamente che in *ogni caso il valore di* d *nelle successive soluzioni aumenta di 3, quello di* k *diminuisce di 2 e quello di* p *diminuisce di 1.*

Il minimo valore di d in alcuni casi è 0 in altri è 1. Per avere la (*) la soluzione con $d = 0$ occorre che sia $3k = n^2 - 2n$ con k intero e quindi deve essere divisibile per 3 il prodotto $n\ (n - 2)$. Invece per avere la (*) la soluzione con $d = 1$ deve risultare divisibile per 3 l'intero $n\ (n - 2) - 2$,

e ciò si verifica quando e solo quando non sono divisibili per 3 nè n nè $n-2$. Si ha perciò:

II) *Il valore minimo di* d *in una soluzione* (d, k) *della* *) *è* 0 *se uno dei due interi* n *e* n − 2 *è divisibile per* 3, *è invece* 1 *se nessuno dei due interi* n *ed* n − 2 *è divisibile per* 3. Nel primo caso le soluzioni sono del tipo:

$$(1) \qquad d = 3s \ , \quad k = \frac{1}{3}(n-2)n - 2s \qquad (s = 0, 1, 2, ..)$$

Nel secondo caso le soluzioni sono del tipo

$$(2) \qquad d = 3s + 1 \quad k = \frac{1}{3}\left|(n-2)\,n - 2\right| - 2s \ (s = 0, 1, 2, ...)$$

Il valore massimo di s si determina tendo conto del valore massimo che può avere il genere p di c'', e quindi con la limitazione che si ricava dalla diseguaglianza

$$(3) \qquad d + k \leqq \frac{2}{(n-1)(n-2)}$$

Ne segue che:

Il massimo valore di s *nel caso delle soluzioni* (1) *è dato da:*

$$(4) \qquad s' = \frac{(n-2)(n-3)}{6}$$

Invece nel caso delle soluzioni (2) *è dato da:*

$$(5) \qquad s'' = \frac{(n-2)(n-3)-2}{6}$$

In quanto al genere p della c'' si osservi che risulta zero per s massimo, cioè il valore (4) nel primo caso ed il valore (5) nel secondo caso. Il genere p è invece 1 quando ad s si dà il valore massimo diminuito di 1. E così via di seguito, il genere è dato dalla differenza fra il massimo s' o s'' di s e quello che si assegna ad s, cioè dalla formola

$$(7) \qquad p = s' - s \text{ nel caso (1)}$$

$$(8) \qquad p = s'' - s \text{ nel caso (2)}$$

con s' ed s'' dati dalle (4) e (5).

Volendo le soluzione $(d,\ k)$ della (*), in funzione di n e di p, basta sostituire nelle (1) e (2) ad s il valore ricavato dalla (7) o (8) rispettivamente. Eseguendo i calcoli si hanno, in entrambi i due casi, le seguenti formole:

$$(9) \qquad d = \frac{(n-2)\,(n-3)}{2} - 3p \quad , \quad k = n - 2 + 2p$$

Si ha pertanto il *teorema fondamentale enunciato nella premessa con le formole* (I) *e* (II) *date delle* (9).

Nota. Si noti che *nel caso* $p = 0$ *è*

$$(10) \qquad d = \frac{(n-2)\,(n-3)}{2} \quad , \quad k = n - 2$$

In questo caso, [come abbiamo già osservato per i particolari valori di n già considerati], è compreso il caso della *c" con un punto* (n — 1) - *plo con le* n — 1 *tangenti sovrapposte* (o infinitamente vicine) e quindi equivalente a $\binom{n-1}{2}$ punti doppi di cui $n - 2$ cuspidali, e quindi con d e k dati dale (10), dalle quali si ricava

$$(11) \quad d + k = \frac{(n-2)\,(n-3) + 2\,(n-2)}{2} = \frac{(n-2)\,(n-1)}{2} = \binom{n-1}{2}$$

3. *Il carattere singolare ed il carattere cuspidale di una curva autoduale.*

Il carattere singolare μ ed il carattere cuspidate σ di una curva algebrica piana le cui singolarità sono equivalenti a d punti doppi nodali, k punti doppi cuspidali, a t tangenti doppie e a i tangenti di flesso, sono dati dà

$$\mu = d + t + k + i \quad , \quad \sigma = k + i$$

Se la curva è autoduale, essendo $d = t$ e $k = i$, si ricava che:

I caratteri cuspidale e singolare di una curva autoduale sono dati da:

$$[1] \qquad \sigma = 2k \quad , \quad \mu = 2\,(d + k)$$

Tenendo conto delle seguenti due relazioni che valgono per una curva algebrica piana:

$$\sigma - (n + m) = 4\,(p - 1)$$
$$2\,\mu + 3\,\sigma - (n^2 + m^2) = 8\,(p - 1)\,,$$

nel caso che la curva sia autoduale si ricava che:

Fra i caratteri n, p, σ *e* μ *di una curva autoduale si hanno le relazioni:*

$$[2] \qquad \begin{cases} \sigma - 2n = 4(p-1) \\ 2\mu + 3\sigma - 2n^2 = 8(p-1). \end{cases}$$

Ne segue che (risolvendo il sistema [2] rispetto a σ e μ):

I caratteri cuspidale σ *e singolare* μ *di una curva autoduale, di genere* p *e di ordine* n, *sono dati da:*

$$[3] \qquad \begin{cases} \sigma = 2n + 4(p-1) \\ \mu = n(n-3) - 4(p-1) \end{cases}$$

Nota. Lo studio delle curve autoduali interessa in particolar modo nel caso $p = 0$, perchè [come dimostreremo in altro lavoro relativo ai rami lineari o superlineari di una *qualunque* curva algebrica piana] ogni ridotta di un tale ramo è sempre una curva, razionale, *autoduale*. Per una tale curva l'insieme delle singolarità è equivalente a d punti doppi nodali e k punti doppi cuspidali, con d e k dati (per le (I) e (II)) da:

$$[2'] \qquad \begin{cases} d = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \\ k = n - 2, \end{cases}$$

ed i caratteri cuspidale σ e singolare μ sono dati (per la [3]) da:

$$[3'] \qquad \sigma = 2n - 4 \quad , \quad \mu = n(n-3) - 4$$

Sulle curve osculatrici di un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 1 dicembre 1956)

Sunto. — Si dimostra che ogni curva osculatrice nell'origine un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica piana è autoduale e si considerano le proprietà che ne derivano per la V_3 determinata in S_5 da ogni tale curva osculatrice considerata come curva completa.

1. *Curve osculatrici complete di un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica del piano complesso, e loro autodualità.*

Assumendo come origine di un ramo lineare o superlineare di una data curva algebrica dell'S_2 (x_1, x_2, x_3) complesso, il punto A_3 (0, 0, 1), detto v l'ordine del ramo, e $v', v'', v''', \ldots$ le sue classi, prima, seconda, terza, ecc. le equazioni parametriche del ramo, col parametro ρ, sono del tipo:

$$x_1 = \mu^v \quad , \quad x_2 = F(\mu) \quad , \quad x_3 = 1 \tag{1}$$

con $F(\mu)$ serie di potenze, convergente nell'intorno di μ 0, data da:

$$F(\mu) = a\,\mu^v + b\,\mu^{v+v'} + c\,\mu^{v+v'+v''} + \ldots\ldots \tag{2}$$

La ridotta di grado zero delle (1) dà l'origine A_3 (0, 0, 1) del ramo. La prima ridotta unidimensionale è quella di grado eguale all'ordine v del ramo:

$$x_1 = \mu^v \quad , \quad x_2 = a\,\mu^v \quad , \quad x_3 = 1 \quad , \tag{3}$$

e rappresenta la retta tangente al ramo, contata v volte, di equazione:

$$ax_1 - x_2 = 0\,, \tag{4}$$

congiungente l'origine A_3 (0, 0, 1) con il punto A $(1, a, 0)$.

La prima ridotta, fra le successive a quella data dalle (3) di grado v,

non coincidente con questa, è quella di grado $v + v'$ data da:

$$(5) \qquad x_1 = \mu^v \quad , \quad x_2 = a\,\mu^v + b\,\mu^{v+v'} \quad , \quad x_3 = 1 \, ,$$

che rappresenta la *prima curva osculatrice al ramo nell'origine*, ed è una curva razionale di ordine $v+v'$, (somma dell'ordine v e della (prima) classe v' della ramo). Questa curva $c^{v+v'}$, considerata come curva luogo, determina una curva inviluppo, ed insieme una *curva completa* $C^{n,m}$ di ordine n e classe m. In questo caso è $n = v + v'$. Dimostriamo che è anche $m = v + v'$ cioè tale curva completa é *autoduale*.

La tangente alla curva $c^{v+v'}$ di equazioni parametriche (5) nel suo punto P, rispondente ad un fissato valore del parametro μ, ha l'equazione:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \mu^v & G(\mu) & 1 \\ v\,\mu^{v-1} & G'(\mu) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dove s'è posto

$$(6') \qquad G(\mu) = a\,\mu^v + b\,\mu^{v+v'}.$$

Le coordinate (a_1, a_2, a_3) di tale retta tangente sono date da:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_1 = -G'(\mu) \\ a_2 = v\,\mu^{v-1} \\ a_3 = \mu^v G'(\rho) - v\,\mu^{v-1} G(\mu). \end{cases}$$

Le (7) sono pertanto le equazioni parametriche, col parametro μ, della curva inviluppo costituita dalle tangenti alla $c^{v+v'}$, di equazioni parametriche (5.) Essendo, per la posizione (6'),

$$G'(\mu) = va\,\mu^{v-1} + (v + v')\,b\,\mu^{v+v'-1},$$

i secondi membri delle (7) risultano tutti divisibili per μ^{v-1}. Eseguendo tale divisione [essendo le coordinate (a_1, a_2, a_3) definite a meno di un fattore] le equazioni dell'inviluppo sono date da:

$$(7') \qquad \begin{cases} a_1 = -(va + (v + v')\,b\,\mu^{v'}) \\ a_2 = v \\ a_3 = \mu\,G'(\mu) - v\,G(\mu). \end{cases}$$

Il parametro μ nei secondi membri delle (7') risulta con l'esponente

massimo $v + v'$ e quindi, dato che i secondi membri non hanno più il divisore comune μ, l'inviluppo risulta di classe $v + v'$.

La ridotta successiva a quella data dalla (5), e non coincidente con questa, è di grado $v + v' + v''$, ed è data da:

$$(8) \qquad x_1 = \mu^v \quad , \quad x_2 = a\,\mu^{v'} + b\,\mu^{v+v'} + c\,\mu^{v+v'+v''} \quad , \quad x_3 = 1$$

che rappresenta la *seconda curva osculatrice al ramo nell'origine*, ed è una curva, razionale, di ordine $v + v' + v''$. Anche questa, considerata insieme alla curva inviluppo che determina, *dà una curva completa autoduale.*

Invero posto nel caso attuale

$$(6'') \qquad G(\mu) = a\,\mu^{v'} + b\,\mu^{v+v'} + c\,\mu^{v+v'+v''}$$

la tangente alla $C^{v+v'+v''}$ di equazioni parametriche (8) risulta ancora rappresentata dalla (6), e le coordinate (a_j) di tale tangente sono ancora date dalle (7), con $G(\mu)$ data dalla (6''). In questo caso risulta:

$$G'(\rho) = va\,\mu^{v-1} + (v + v')\,b\,\mu^{v+v'-1} + (v + v' + v'')\,c\,\mu^{v+v'+v''-1}$$

e i secondi membri delle (7) risultano ancora tutti divisibili per μ^{v-1}. Eseguendo tale divisione la coordinata a_2 risulta sempre data dalla costante v, ed il grado massimo di secondi membri in μ risulta $v + v' + v''$, grado della $G(\mu)$ che interviene nel secondo membro della terza delle equazioni (7') ottenute dalle (7) dopo la divisione per μ^{v-1}.

La dimostrazione fatta relativamente alle ridotte (5) e (8) del ramo si estende a tutte le ridotte successive. Si ha pertanto il

Teorema: Tutte le curve osculatrici nell'origine un ramo lineare, o superlineare, di una curva algebrica piana, sono autoduali.

Nota. Si noti esplicitamente che la $c^{v+v'}$ di equazioni (5) se v e v' non sono i primi fra di loro risulta una curva multipla. Analoga osservazione vale per le altre curve osculatrici.

2. *La* V_3 *di* S_5 *determinata da una curva dell'* S_2.

Data una curva algebrica c^n nell'S_2 (x_1, x_2, x_3) complesso prolungandola nel campo biduale e facendo della curva biduale ottenuta la rappresentazione complessa, resta determinata nell'S_5 complesso una varietà V_3 di ordine n^2 che si spezza, se la c^n è dotata di punti multipli: precisamente per ogni punto multiplo P di c^n dalla V_3 si stacca un S_3 contato tante volte

quant'è l'abbassamento della classe della c'' causato dalla presenza di tale punto multiplo P e degli eventuali altri punti multipli che la c'' può avere negl'intorni del primo, secondo, ecc. ordine di P. La V_3 irriducibile residua risulta di ordine $n + m$, essendo m la classe di c''.

Se la c'' è data mediante l'equazione:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{9}$$

la V_3, di ordine n^2 nell'S_5 $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ è rappresentata dal sistema che si ottiene associando alla (9) l'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0 \ . \tag{10}$$

Se invece la c'' è data mediante equazioni parametriche:

$$x_1 = F_1(\mu) \quad , \quad x_2 = F_2(\mu) \quad , \quad x_3 = F_3(\mu) \quad , \tag{11}$$

la $V_3^{n(n-1)}$ determinata dalla c'' in S_5 è rappresentata dall'equazioni parametriche, nei tre parametri μ, λ, ρ:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda F_1(\mu) \quad , \quad x_2 = \lambda F_2(\mu) \quad , \quad x_3 = \lambda F_3(\mu) \\ y_1 = F_1(\mu) + \rho F'_1(\mu) \, , \, y_2 = F_2(\mu) + \rho F'_2(\mu) \, , \, y_3 = F_3(\mu) + \rho F'_3(\mu) \end{cases} \tag{12}$$

Nel caso che le (11) sono le equazioni parametriche di un ramo di una curva algebrica, le (12) rappresentano in S_5 una falda tridimensionale della V_3 determinata in S_5 da tale curva algebrica[1]).

3. *La V_3 di S_5 determinata dalla prima curva osculatrice $c'^{(v'-1)}$ di un ramo di ordine v e classe v'.*

Riprendiamo la curva $c'^{(v'-1)}$ prima osculatrice al ramo (1). Di tale curva abbiamo le equazioni parametriche (5), cioè, per la posizione (6'):

$$x_1 = \mu^{v'} \quad , \quad x_2 = G(\mu) \quad , \quad x_3 = 1 \tag{5}$$

Applicando le (11) e (12) si ha che:

[1]) N. Spampinato — a) Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica piana. b) Le falde tridimensionali dell'S_5 determinati dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa. c) Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali.

La V_3 *di* S_5 *determinata dalla* $c^{v+v'}$ *di equazione parametriche* (5) *ha l' equazioni parametriche:*

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda\mu^v \quad , \quad x_2 = \lambda G(\mu) \quad , \quad x_3 = \lambda \\ y_1 = \mu^v + v\,\mu^{v-1}\,\rho \quad , \quad y_2 = G(\mu) + \rho\, G'(\mu) \quad , \quad y_3 = 1 \ . \end{cases}$$

con $G(\mu) = a\,\mu^v + b^{v+v'}$,

Le (13), per un fissato valore nel parametro μ rappresentano in S_5 un piano, quello congiungente i tre punti

$$(14)\qquad \begin{cases} M(\mu^v\ ,\ 0\ ,\ G(\mu)\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0) \\ M'(0\ ,\ \mu^{v'}\ ,\ 0\ ,\ G(\mu)\ ,\ 0\ ,\ 1) \\ Q'(0\ ,\ v\,\mu^{v-1}\ ,\ 0\ ,\ G'(\mu)\ ,\ 0\ ,\ 0)\ , \end{cases}$$

dato che le (13) si ottengono combinando lineamente le coordinate di M,M' e Q' secondo i numeri λ, 1, ρ.

Il punto M descrive, nel piano S_2 di S_5 di equazioni:

$$(15)\qquad y_1 = y_2 = y_3 = 0 \ ,$$

la curva $c^{v+v'}$ di equazione parametriche (5).

Il punto M' descrive, nel piano S_2' di S_5 di equazioni:

$$(16)\qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \ ,$$

la curva c' omologa della $c^{v+v'}$ di S_2 nella proiettività w fra S_2 ed S_2' di equazioni:

$$(17)\qquad x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2 \quad , \quad x_3 = y_3 \ .$$

Il punto Q' ha per coordinate (funzioni di μ) le derivate delle funzioni di μ che danno le coordinate del punto M' della curva c'. Segue che la retta $t' = M'Q'$ è la tangente alla curva c' nel punto M', quindi la retta t' descrive la curva inviluppo del piano S_2' determinata dalla curva luogo c' omologa della curva $c^{v+v'}$ di S_2 nella proiettività w. Ma questa curva, per quanto è dimostrato nel n° precedente, è di classe $v + v'$ e quindi sarà pure di classe $v + v'$ la c' e perciò per un punto fissato genericamente in S_2' passano $v + v'$ tangenti alla curva c'. Da tale proprietà segue, che la V_3 di equazioni parametriche (13) è di ordine 2 $(v + v')$, somma

dell'ordine n e della classe m di $c^{v+v'}$, dato che la V_3, costituita da ∞^1 piani M M' Q' con M variabile in $c^{v+v'}$ di S_2 e $t' = M' Q'$ tangente a c' nel punto M' omologo di M nella proiettività w, secata con un S_4 passante per S_2' dà una V_2 spezzata nel piano S_2' contato $v + v'$ volte (dato che per un generico punto di tale piano passano $v + v'$ piani generatori: della V_3) ed altri $v + v'$ piani generatori quelli uscenti dai $v + v'$ punti di $c^{v+v'}$ in cui questa curva è secata dall'S_4. Si ha perciò:

La V_3 *di equazioni parametriche* (13), *determinata in* S_5 *dalla curva completa autoduale* $c^{v+v'}$, *prima osculatrice del ramo lineare o superlineare* (1), *è di ordine* $2(v + v')$. *Essa é costituita da* ∞^1 *piani generatori* $Mt' = M M' Q'$, *con le terne di punti* M, M', Q' *di coordinate* (14) *funzioni del parametro* μ.

La $c^{v+v'}$ *descritta dal punto* M *nel piano* S_2 *costituisce una curva direttrice della* V_3. *L'inviluppo descritto dalla retta* t' *in* S_2' *è costituito dalle tangenti alla curva* c' *omologa della* $c^{v+v'}$ *nella proiettività* w. *Il piano* S_2' *appartiene alla* $V_3^{2(v+v')}$ *con la multiplicità* $v + v'$

4. *La* V_3 *di* S_5 *determinata dalle successive curve osculatrici di un ramo di ordine* v *e classi* $v, v', v'', \ldots$

Consideriamo ora la curva $c^{v+v'+v''}$ di equazioni (8), seconda curva osculatrice al ramo nell'origine. Applicando in questo caso le (11) e (12) si ha che:

La V_3 *di* S_5 *determinata dalla* $c^{v+v'+v''}$ *di equazioni parametriche* (8) *ha l'equazioni parametriche* (13) *con* G (μ) *funzione data dalla* (6″). *Essa risulta costituita da* ∞^1 *piani generatori* MM' Q' *con i tre punti* M, M', Q *di coordinate* (14) *funzioni del parametro* μ. *La* $c^{v+v'+v''}$ *descritta dal punto* M *nel piano* S_2 *costituisce una curva direttrice della* V_3. *L'inviluppo descritto dalla retta* M' Q', *di classe* $v + v' + v''$. *è costituito dalle tangenti alla curva* c' *di* S_2' *omologa della* $c^{v+v'+v''}$ *nella proiettività* w *fra* S_2 *ed* S_2'. *La* V_3 *è di ordine* $2(v + v' + v'')$.

Questo teorema si estende immediatamente alle successive curve osculatrici del ramo date dalle ridotte di grado $v + v' + v'' + v'''$, ecc. Si ottiene sempre *una* V_3 *di ordine doppio dell'ordine della curva osculatrice che la determina,* in conseguenza della proprietà fondamentale di tali curve osculatrici di essere autoduali, e della proprietà generale per la V_3 determinata da una curva algebrica piana nell'S_5 attraverso il prolungamento di questa curva nel campo biduale, di avere la parte irriducibile, di ordine $n + m$, indicando con m la classe della curva. Gli S_3 che si staccano dalla V_3, quando si considera rappresentata dal sistema delle due

equazioni (9) e (10), sono determinati dagli eventuali punti multipli della curva che la determina, staccandosi ogni $S_3 = RS_2'$, con R punto multiplo della curva con la multiplicità data dall' abbassamento della classe prodotta dal punto multiplo R e degli altri punti multipli che la curva può avere negli intorni di R di qualunque ordine. Se la curva è data invece mediante le equazioni parametriche (11), con le equazioni (12) si ottiene direttamente la parte irriducibile della V_3, cioè la $V_3^{n \cdot m}$, residua della $V_3^{n^2}$ rappresentata dalle due equazioni (9) e (10). Si noti che se la curva è priva di punti multipli risulta $n + m = n^2$.

Fasi ed habitus cristallino degli alluminati di calcio idrati.

Nota del prof. **Riccardo Sersale**, *presentata dal Socio* **G. Malquori**

[Adunanza del dì 1° dicembre 1956]

Sunto. — Soluzioni limpide, ottenute dibattendo con acqua del cemento alluminoso o dell'alluminato monocalcico preparato in laboratorio, sono state addizionate di acqua di calce in differenti rapporti. Si è seguita al microscopio l'evoluzione degli alluminati idrati, metastabili, in cristalli di habitus esagonale — separatisi dal liquido — verso la fase cristallina stabile, cubica: l'alluminato tricalcico esaidrato, in cubi, analizzando singolarmente le variabili che influenzano l'evoluzione medesima.

Facendo seguito ad una nota pubblicata su questo Rendiconto [1]), si riferisce sull'evoluzione dell'habitus cristallino dei solidi che si ottengono addizionando acqua di calce a soluzioni ricavate dibattendo con acqua sia del cemento fuso od alluminoso sia dell'alluminato monocalcico ottenuto per trattamento termico di miscele dei due ossidi in adatto rapporto.

Dopo polverizzazione spinta dei materiali, essi sono infatti stati dibattuti con acqua; si è di poi separata la parte indisciolta e dalle soluzioni filtrate, assolutamente limpide, si son prelevati i campioni per l'analisi onde stabilire i titoli di Al_2O_3 e di CaO.

Al filtrato si sono aggiunti volumi diversi di acqua di calce satura, onde realizzare nella soluzione risultante il rapporto: CaO/Al_2O_3 desiderato. Avvenuta la mescolanza, dopo qualche minuto si è osservato l'inizio della separazione di un solido bianco, cristallino, di cui si è seguita l'evoluzione a mezzo del microscopio.

Si sono prese in considerazione tre temperature: 20°, 50°, 80° c.

Operando alla temperatura di 20°, per bassi rapporti molecolari CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale e precisamente per rapporti CaO/Al_2O_3 da 2 a 6, la specie cristallina originatasi nelle condizioni sopra riportate, risulta esser costituita da sottili lamelle esagonali (alluminati calcici idrati, metastabili), come mostrano rispettivamente la tabella I e la tavola I.

[1]) Sersale R., Calarese L., *Sull'habitus cristallino dei solidi che prendono origine nella reazione fra l'allumina e la soluzione di calce.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 4ª, vol. XXII, 1955, pp. 235-248.

Con l'aumento del rapporto molecolare CaO/Al_2O_3, prendono invece origine cristallizzazioni di sistema cubico e precisamente: per rapporti 8-13 la specie cristallina si presenta in icositetraedri, mentre per rapporti 15-23 in ottaedri (vedi tabella I e tavola I). Come infatti è noto, l'alluminato tricalcico esaidrato può esistere in cristalli di habitus differente: icositetraedri, ottaedri, rombododecaedri, cubi e loro combinazioni.

Si noti a questo punto, come del resto risulta dalla medesima tabella I, l'influenza esercitata dalla durata del contatto sulla specie cristallina formata. Infatti per un medesimo rapporto molecolare, quegli icositetraedri che si osservano al microscopio dopo dieci giorni dalla formazione del precipitato bianco cristallino, son capaci di tramutarsi in ottaedri, come appare all'osservazione ripetuta a distanza di due mesi. (Vedi tabella I, rapporto mol. $CaO/Al_2O_3 = 11,08$).

Le medesime esperienze sono state condotte alla temperatura di 50° ed 80° C., mantenendo in continua agitazione, in appositi bagni termostatici, la soluzione ed il corpo di fondo contenuti in bottigliette di vetro di Jena, munite di tappo di gomma a perfetta tenuta.

Operando alla temperatura di 50° si è osservato che per rapporti calce/allumina fino a circa 11, la fase cristallina formatasi si presenta in icositetraedri ed in rombododecaedri, mentre incrementando il rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 (intorno a 13-16) la fase cristallina si presenta in cubi. (Vedi tabella III e tavola II). Dette osservazioni sono state effettuate dopo 48 ore dalla formazione del precipitato e, ripetute a distanza di dieci giorni e di due mesi, non hanno mostrato apprezzabili variazioni.

Operando alla temperatura di 80°, già per rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 intorno a 11, l'analisi microscopica della specie cristallina rivela presenza di bei cubi molto netti (vedi tabella V). Si noti a questo proposito la considerevole influenza esercitata dalla temperatura sulla velocità di formazione della specie cristallina e sul raggiungimento della forma stabile ($C_3A \cdot 6H_2O$ in cubi), come chiaramente appare dal confronto dei dati ottenuti sperimentando alla temperatura di 20°, 50° ed 80°, rispettivamente.

Le esperienze fin qui brevemente descritte sono state ripetute, nelle stesse condizioni, in presenza di sostanze tensioattive. Questa serie di esperienze è stata eseguita onde osservare come le sostanze tensioattive, presenti nella soluzione dalla quale si vien separando un solido cristallino, influiscono sullo sviluppo morfologico, cioè sull'habitus del cristallo finale.

Le esperienze, condotte a 20° C. sono state effettuate in presenza di sostanze tensioattive, stabili sia all'idrossido di calcio che ai sali di calcio. In tabella II ed in tavola I sono riportati i risultati ottenuti adoperando come sostanza tensioattiva una miscela di trietanolamina e sali di calcio

dell'acido ligninsolfonico (Darex). Si è confermato quanto osservato nella precedente nota, e cioè che l'aggiunta di piccole quantità di dette sostanze, contenuta nell'ordine di grandezza dell'impiego di queste sostanze come plastificanti ed aeranti del calcestruzzo, stabilizza la fase metastabile (cristalli a contorno esagonale). Infatti anche per alti rapporti molecolari CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale (intorno a 25) si riscontrano lamelle esagonali.

Operando invece alla temperatura di 50° C., l'aggiunta al sistema di sostanze tensioattive esercita soltanto un'azione ritardatrice del raggiungimento della forma stabile (vedi tabella IV e tavola II); detta azione è praticamente trascurabile se la temperatura a cui si opera è di 80° C. (vedi tabella V). A temperatura ambiente, quindi, l'influenza stabilizzatrice della sostanza tensioattiva nei confronti delle fasi metastabili è sentita, mentre, a caldo, l'influenza ritardatrice delle dette sostanze ai fini del raggiungimento della forma stabile si fa sentire tanto meno quanto più alta è la temperatura considerata.

Si è ancora voluto studiare l'influenza dell'aumento del pH delle soluzioni mediante aggiunta di soda.

Operando alla temperatura ambiente, già per bassi valori del rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 (intorno a 3) (vedi tabella VI e tavola III) il corpo di fondo è costituito da icositetraedri. Incrementando il rapporto (intorno ad 8) la specie cristallina si presenta in cubi, ottaedri e loro combinazioni.

A 50° C., per bassi valori del rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 (intorno a 3), il corpo di fondo è costituito da rombododecaedri (vedi tavola III, foto n. 14).

Ad 80° per un medesimo valore del rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 (intorno a 3) la specie cristallina presente è costituita da cubi. (Vedi tabella VI e tavola III).

Si noti, ancora una volta, la considerevole influenza della temperatura sulla velocità di evoluzione dell'alluminato tricalcico esaidrato verso la forma stabile (cubica), evoluzione che questa volta è ancor più rapida grazie all'innalzamento del pH della soluzione, conseguito con l'aggiunta di alcali.

Le medesime esperienze sono state ripetute, partendo da soluzioni ottenute dibattendo con acqua distillata, bollita in precedenza, dell'alluminato monocalcico preparato in laboratorio, addizionate di acqua satura di calce, in differenti rapporti, previa filtrazione del materiale indisciolto.

I risultati ottenuti hanno confermato quanto precedentemente esposto, partendo cioè da cemento alluminoso. Non si è constatata alcuna variazione degna di rilievo.

Da quanto precedentemente esposto si conclude che sulla velocità di evoluzione della fase metastabile (alluminati calcici a contorno esagonale)

verso la fase stabile (alluminato tricalcico esaidrato in cubi) è predominante l'influenza del rapporto CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale, e di conseguenza del titolo di CaO della soluzione di contatto, nonchè quella della temperatura.

Innalzando temperatura e rapporto CaO/Al_2O_3 si accelera la su detta evoluzione, la quale è invece inibita o ritardata dall'aggiunta di piccole quantità di agente tensioattivo.

Elevando il pH del sistema iniziale leggermente al disopra del valore che compete alla soluzione satura di calce, mediante piccole aggiunte di soluzione di soda caustica, l'evoluzione dell'habitus cristallino dell'alluminato $C_3A \cdot 6H_2O$ diviene più rapida.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università, novembre 1956.

TABELLA I

Moli di CaO in 1000 cc. di soluzione	Moli di Al_2O_3 in 1000 cc. di soluzione	Rapporto mol. CaO/Al_2O_3	Temp. °C.	Habitus dei cristalliti	
				dopo dieci giorni	dopo due mesi
0,01990	0,007573	2,62	20°	lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 11,95
0,02178	0,005680	3,83	20°	lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 12,20
0,02291	0,004544	5,04	20°	lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 12,34
0,02367	0,003786	6,24	20°	lamelle esagonali meno chiare	lamelle esagonali meno chiare pH = 12,37
0,02460	0,002840	8,66	20°	icositetraedri chiari con lamelle esagonali poco nette	icositetraedri più numerosi pH = 12,40
0,02516	0,002272	11,08	20°	icositetraedri	ottaedri pH = 12,50
0,02553	0,001993	13,48	20°	icositetraedri e numerosi ottaedri chiari	ottaedri pH = 12,53
0,02581	0,001623	15,90	20°	ottaedri	ottaedri pH = 12,54
0,02601	0,001420	18,31	20°	ottaedri	ottaedri pH = 12,55
0,02616	0,001262	20,73	20°	ottaedri meno chiari	ottaedri pH = 12,58
0,02629	0,001136	23,14	20°	ottaedri meno chiari	numerosi ottaedri pH = 12,60

TABELLA II

Moli di CaO in 1000 cc. di soluzione	Moli di Al_2O_3 in 1000 cc. di soluzione	Rapporto mol. CaO/Al_2O_3	Temp. °C.	Tensioattivo	°/00	Habitus dei cristalliti	
						dopo dieci giorni	dopo due mesi
0,02178	0,005680	3,83	20°	Darex A. E. A.	0,003	lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 11,90
0,02553	0,001993	13,48	20°	»	»	lamelle esagonali rade e minuti ottaedri	ottaedri pH = 12,25
0,02640	0,001033	25,56	20°	»	»	lamelle esagonali assai minute; cristalli minutissimi, probabilmente: ottaedri	ottaedri minuti pH = 12,33
0,02178	0,005680	3,83	20°	Darex S. R. D. A.	0,04	lamelle esagonali	lamelle esagonali poco nette pH = 11,91
0,02553	0,001993	13,48	20°	»	»	minutissime lamelle esagonali	idem pH = 12,25
0,02640	0,001033	25,56	20°	»	»	lamelle esagonali assai poco nette	idem pH = 12,35

TABELLA III

Moli di CaO in 1000 cc. di soluzione	Moli di Al_2O_3 in 1000 cc. di soluzione	Rapporto mol. CaO/Al_2O_3	Temp. °C.	Habitus dei cristalliti		
				dopo 48 ore	dopo dieci giorni	dopo due mesi
0,01990	0,007573	2,62	50°	cristalli radi assai minuti	lamelle esagonali poco chiare	lamelle esagonali
0,02178	0,005680	3,83	50°	icositetraedri	icositetraedri	icositetraedri
0,02291	0,004544	5,04	50°	icositetraedri radi e rombododecaedri	icositetraedri e rombododecaedri	icositetraedri e rombododecaedri
0,02367	0,003786	6,24	50°	icositetraedri radi e rombododecaedri	rombododecaedri	rombododecaedri
0,02420	0,003246	7,45	50°	rombododecaedri	rombododecaedri	rombododecaedri
0,02460	0,002840	8,66	50°	rombododecaedri	rombododecaedri	rombododecaedri
0,02516	0,002272	11,08	50°	rombododecaedri non molto chiari	rombododecaedri netti	rombododecaedri netti
0,02553	0,001993	13,48	50°	cubi molto netti	cubi molti netti	cubi molto netti
0,02581	0,001623	15,90	50°	cubi di dimensioni inferiori molto chiari	cubi nettissimi	cubi nettissimi

TABELLA IV

Moli di CaO in 1000 cc. di soluzione	Moli di Al_2O_3 in 1000 cc. di soluzione	Rapporto mol. CaO/Al_2O_3	Temp. °C.	Tensioattivo	- °/00	Habitus dei cristalliti		
						dopo 48 ore	dopo dieci giorni	dopo due mesi
0,02178	0,005680	3,83	50°	Darex A. E. A.	0,003	icositetraedri	icositetraedri alterati	icositetraedri alterati
0,02460	0,002840	8,66	50°	»	»	icositetraedri e rombododecaedri	icositetraedri alterati e rombododecaedri	icositetraderi alterati e rombododecaedri
0,02553	0,001993	13,48	50°	»	»	combinazioni di cubo e rombododecaedro	combinazioni di cubo e rombododecaedro	combinazioni di cubo e rombododecaedro
0,02581	0,001623	15,90	50°	»	»	combinazioni di cubo e rombododecaedro	combinazioni di cubo e rombododecaedro	combinazioni di cubo e rombododecaedro
0,02178	0,005680	3,83	50°	Darex S. R.D.A.	0,04	icositetraedri	icositetraedri piuttosto alterati	icositetraedri piuttosto alterati
0,02460	0,002840	8,66	50°	»	»	icositetraedri e rombododecaedri	cristallizzazioni nel complesso peggiorate	cristallizzazioni nel complesso peggiorate
0,02553	0,001993	13,48	50°	»	»	icositetraedri e rombododecaedri alterati	icositetraedri e rombododecaedri, combinazioni di cubo e rombododecaedro, alterati	icositetraedri e rombododecaedri, combinazioni di cubo e rombododecaedro, alterati
0,02581	0,001623	15,90	50°	»	»	rombododecaedri	rombododecaedri	rombododecaedri

TABELLA V

Moli di CaO in 1000 cc. di soluzione	Moli di Al_2O_3 in 1000 cc. di soluzione	Rapporto mol. CaO/Al_2O_3	Temp. °C.	Tensioattivo	°/₀₀	Habitus dei cristalliti		
						dopo 48 ore	dopo dieci giorni	dopo due mesi
0,02178	0,005680	3,83	80°	—	—	icositetraedri	icositetraedri	icositetraedri
0,02367	0,003786	6,24	80°	—		radi icositetraedri e rombododecaedri	radi icositetraedri e rombododedaedri	rombododecaedri più minuti e radi cubi di piccole dimensioni
0,02460	0,002840	8,66	80°	—	—	combinazioni di cubo e rombododecaedro	combinazioni di cubo e rombododecaedro	combinazioni di cubo e rombododecaedro
0,02516	0,002272	11,08	80°	—	—	cubi	cubi molto chiari	cubi molto chiari
0,02581	0,001623	15,90	80°	—	—	cubi	cubi molto chiari	cubi molto chiari
0,02178	0,005680	3,83	80°	Darex S.R.D.A.	0,04	icositetraedri alterati	icositetraedri alterati	icositetraedri alterati
0,02460	0,002840	8,66	80°	»	»	rombododecaedri minuti	rombododecaedri minuti	rombododecaedri minuti
0,02553	0,001993	13,48	80°	»	»	rombododecaedri minuti	rombododecaedri minuti	rombododecaedri minuti

TABELLA VI*

Moli di CaO in 100 cc. di soluzione	Moli di Al_2O_3 in 1000 cc. di soluzione	Rapporto mol. CaO/Al_2O_3	Temp. °C.	Habitus dei cristalliti		
				dopo 48 ore	dopo dieci giorni	dopo due mesi
0,02178	0,005680	3,83	20°	icositetraedri di piccole dimensioni e numerosi	icositetraedri di piccole dimensioni e numerosi	icositetraedri di piccole dimensioni pH = 12,86
0,02460	0,002840	8,66	20°	combinazioni di cubo ed ottaedro	combinazioni di cubo ed ottaedro	cubi, ottaedri e loro combinazioni pH = 12,89
0,02581	0,001623	15,90	20°	frammenti di cristalliti non individuabili	frammenti di cristalliti non individuabili	frammenti di cristalliti non individuabili e qualche ottaedro pH = 12,91
0,02640	0,001033	25,56	20°	frammenti di cristalliti non individuabili	frammenti di cristalliti non individuabili	frammenti di cristalliti non individuabili pH = 12,96
0,01990	0,007573	2,62	50°	rombododecaedri	rombododecaedri di piccole dimensioni	rombododecaedri di piccole dimensioni
0,02178	0,005680	3,83	50°	rombododecaedri	rombododecaedri	rombododecaedri
0,02367	0,003786	6,24	50°	cubi con qualche rombododecaedro	cubi	cubi
0,02460	0,002840	8,66	50°	cubi	cubi	cubi
0,02553	0,001993	13,48	50°	cubi e cristallizzazioni molto peggiorate	cristallizzazioni peggiorate	cristallizzazioni peggiorate
0,02581	0,001623	15,90	50°	cristallizzazioni molto peggiorate	cristallizzazioni peggiorate	cristallizzazioni peggiorate
0,02178	0,005680	3,83	80°	cubi	cubi	cubi, un po' alterati
0,02460	0,002840	8,66	80°	cristallizzazioni molto peggiorate	cristallizzazioni peggiorate	cristallizzazioni peggiorate
0,02581	0,001623	15,90	80°	cristallizzazioni molto peggiorate	cristallizzazioni peggiorate	cristallizzazioni peggiorate

* (Si è aumentato il pH del sistema mediante aggiunta di soluzione di NaOH).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I.

Foto n. 1: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 2,62; Temp. 20° C.; Ingrand. × 600 (Lamelle esagonali).

Foto n. 2: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 8,66; Temp. 20° C.; Ingrand. × 600 (Icositetraedri).

Foto n. 3: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 15,90; Temp. 20° C.; Ingrand. × 600 (Ottaedri).

Foto n. 4: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 3,83; Temp. 20° C.; Darex 0,04‰; Ingrand. × 600 (Lamelle esagonali).

Foto n. 5: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 13,48; Temp. 20° C.; Darex 0,04‰; Ingrand. × 600 (Lamelle esagonali).

Foto n. 6: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 25,56; Temp. 20° C.; Darex 0,04‰; Ingrand. × 600 (Lamelle esagonali).

(confrontare: tabella I per foto n. 1, 2, 3;
» II » » » 4, 5, 6).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA II.

Foto n. 7: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 3,83; Temp. 50° C.; Ingrand. × 600 (Icositetraedri).

Foto n. 8: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 8,66; Temp. 50° C.; Ingrand. × 600 (Rombododecaedri).

Foto n. 9: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 15,90; Temp. 50° C.; Ingrand. × 600 (Cubi).

Foto n. 10: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 3,83; Temp. 50° C.; Darex 0,04‰; Ingrand. × 600 (Icositetraedri).

Foto n. 11: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 8,66; Temp. 50° C.; Darex 0,04‰; Ingrand. × 600 (Icositetraedri ed Rombododecaedri).

Foto n. 12: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 15,90; Temp. 50° C.; Darex 0,04‰; Ingrand. × 600 (Rombododecaedri).

(confrontare: tabella III per foto n. 7, 8, 9;
» » IV » » 10, 11, 12).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA III.

(in presenza di piccole quantità di NaOH)

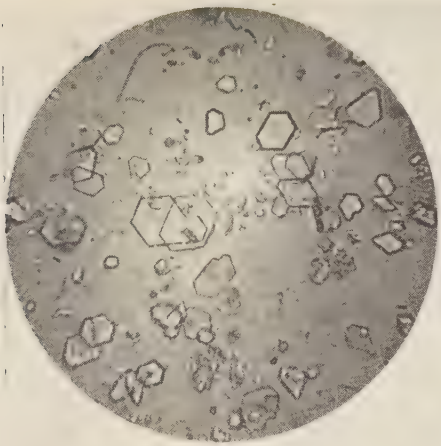
Foto n. 13: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 3,83; Temp. 20° C.; Ingrand. × 600 (Icositetraedri).

Foto n. 14: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 3,83; Temp. 50° C.; Ingrand. × 600 (Rombododecaedri).

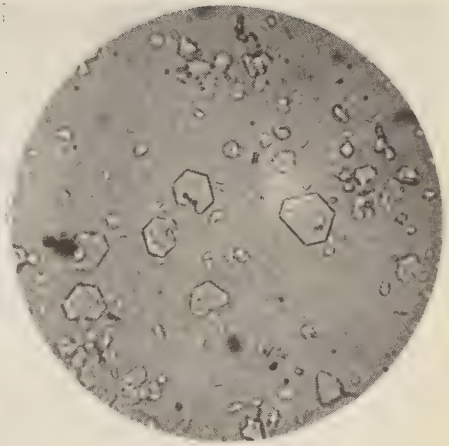
Foto n. 15: Rapporto molecolare CaO/Al_2O_3 = 3,83; Temp. 80° C.; Ingrand. × 600 (Cubi).

(confrontare: tabella VI).

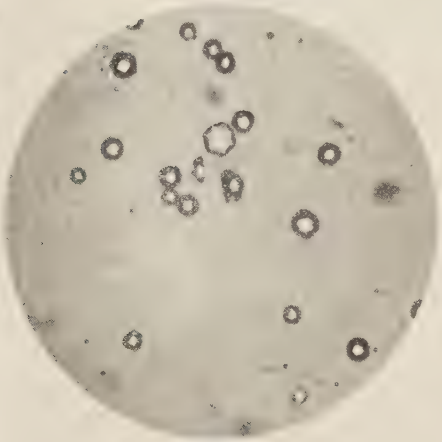
Tutte le tavole risultano ridotte a 3/4 delle dimensioni originali.



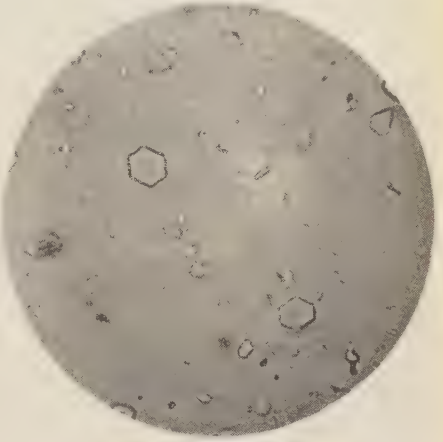
1



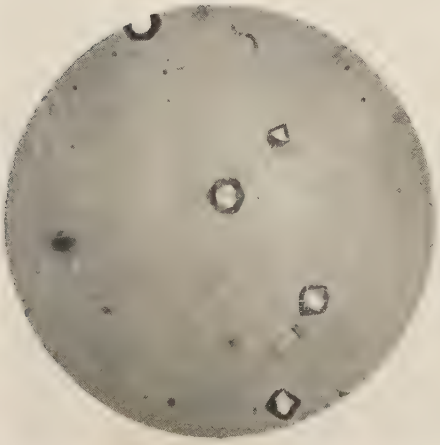
4



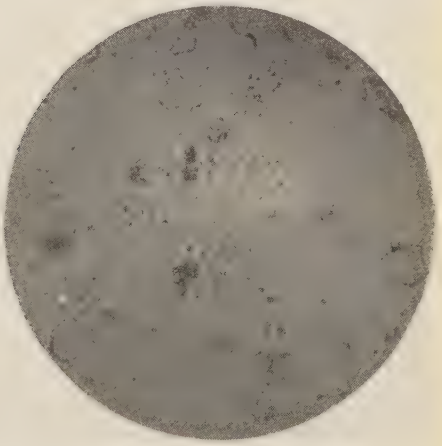
2



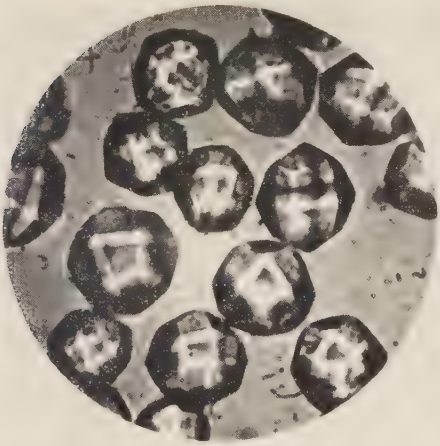
5



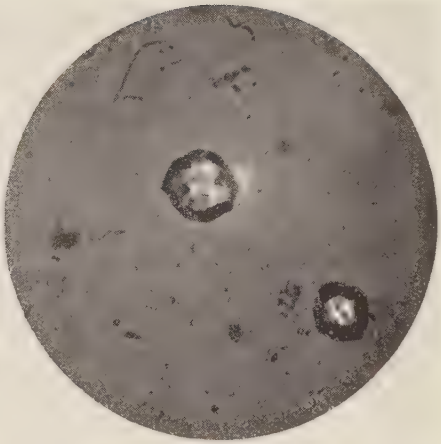
3



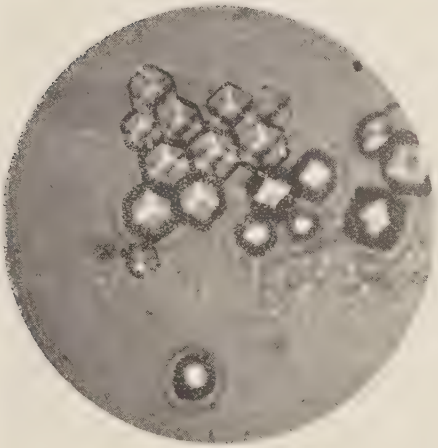
6



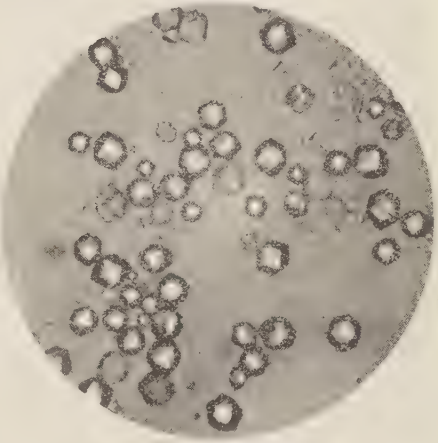
7



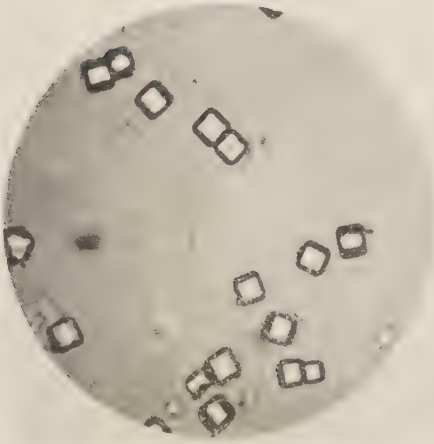
10



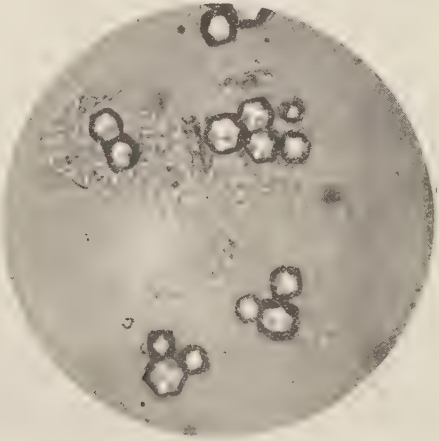
8



11

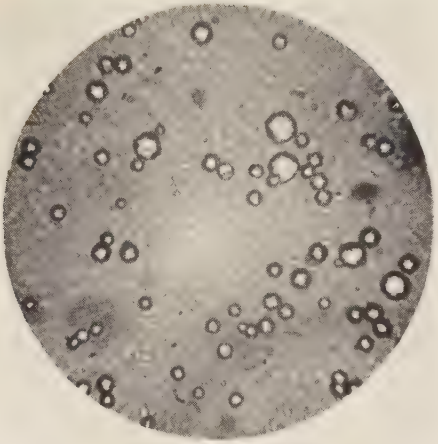


9

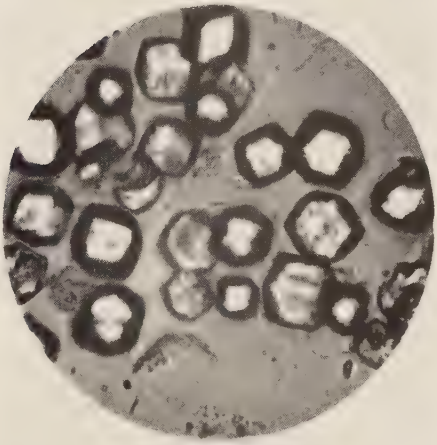


12

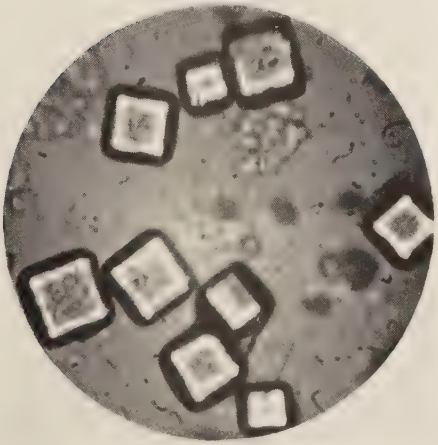
13



14



15



Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli - Cigliano - Arco Felice

Nota del dott. **Renato Sinno**, *presentata dal socio* **A. Scherillo**

[Adunanza del dì 1° dicembre 1956]

Sunto. — E' stato effettuato uno studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli - Arco Felice che comprende il vulcano di Cigliano. In base alla stratigrafia si è potuto stabilire che Cigliano è stato posteriore ad Agnano ed alla Solfatara ed immediatamente precedente ad Astroni, i cui prodotti ricoprirono completamente il cono del Cigliano.

In base ad osservazioni stratigrafiche e chimiche si è potuto inoltre stabilire che i prodotti in vista che costituiscono la terrazza de « La Starza » nel tratto Pozzuoli - Arco Felice appartengono al cratere di Cigliano.

Nel precedente lavoro, presentato lo scorso anno all' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (1), mi occupai della stratigrafia della zona flegrea compresa tra Bagnoli e Pozzuoli; in questo lavoro, che vuole essere di completamento, mi occupo della stratigrafia del tratto compreso tra Pozzuoli ed Arco Felice, includendo tutta la zona interna che ha per centro il cratere di Cigliano.

Ho preferito per maggior chiarezza dividere lo studio in due parti, e precisamente mentre nella prima parte tratterò esclusivamente dei prodotti presenti lungo la fascia costiera, prodotti che costituiscono la terrazza de « La Starza », nella seconda riferirò sui prodotti che ho rinvenuto nella zona del Cigliano, i cui confini sono delimitati, procedendo da Est verso Ovest, dalle cinte crateriche della Solfatara, di Astroni, di Fossa Lupara e del Gauro (Tav. VI, fig. 2).

CAPITOLO I.

Zona costiera Pozzuoli - Arco Felice.

Descrizione stratigrafica.

Il tratto costiero che unisce Pozzuoli con Arco Felice è costituito interamente dalla terrazza de « La Starza » (Tav. I), che, interrotta all' altezza dei Cappuccini, in questo tratto assume il massimo sviluppo sia in lunghezza che in altezza (la massima quota sul livello del mare è di 77-80 metri).

Le prime formazioni facenti parte di questa terrazza cominciano ad affiorare dopo l'interruzione tra i Cappuccini ed il Serapeo, all'altezza del vallone dell'Annunziata (tronco che allaccia Pozzuoli alla Domiziana), ove un profondo solco di erosione, corrispondente, come avremo modo di osservare in seguito, al bacino di displuvio del Cigliano, ha messo bene in evidenza la costituzione stratigrafica di questo tratto iniziale.

All'altezza del mercato ortofrutticolo di Pozzuoli affiora la seguente serie di terreni, così costituiti procedendo dal basso verso l'alto:

a) pozzolane gialline stratificate appena riconoscibili, di potenza non apprezzabile perchè ricoperte di vegetazione;

b) pomici rossastre stratificate alternate a pozzolane rossastre anch'esse stratificate (potenza dello strato, metri 2-3);

c) pozzolane chiare, miste a ceneri chiare non stratificate, sfumanti al limite superiore nel terreno vegetale (potenza complessiva, metri 10).

Il primo strato, che in questo tratto iniziale è appena riconoscibile, è invece sempre presente lungo tutto l'arco di costa: per il suo tipico colore, che ne permette facilmente l'identificazione, per la sua costante frequenza, ho assunto questa formazione come «livello guida».

Lungo la strada carrozzabile che congiunge Pozzuoli con Arco Felice le formazioni de «La Starza» risultano comprese tra la strada ferrata della Cumana e la Via Domiziana, la cui massicciata poggia sulle formazioni più recenti della terrazza. Proseguendo quindi verso Ovest la stra-

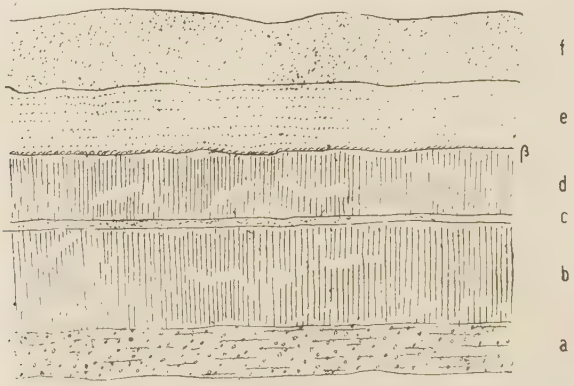


Fig. 1.

tigrafia comincia a subire delle variazioni: infatti all'altezza del Macello, al disotto delle pomici rossastre, diventa sempre più consistente lo strato *a*, vale a dire il «livello guida» delle pozzolane gialline, al cui graduale aumento di potenza man mano che si procede da Est verso Ovest, corrisponde la graduale scomparsa delle pomici rossastre, il cui livello sale considerando sempre la stessa direzione.

Le pozzolane gialline assumono il massimo spessore alla stazione del Cantiere della Ferrovia Cumana (Tav. III, fig. 2), ove la serie, sempre procedendo dal basso verso l'alto, risulta così modificata:

a) pozzolane miste a sabbia rimaneggiata, di colore grigio-marrone, ricche di lapillo scuro (potenza non ben definita);

b) pozzolane compatte di color bianco rosato finemente suddivise, ricchissime di fossili (potenza dello strato, metri 6);

c) sabbie finissime di origine marina (potenza, cm. 40-50);

d) pozzolane di color bianco rosato, compatte, finemente suddivise, con le medesime caratteristiche di quelle dello strato *a*, ma, al contrario di quelle inferiori, prive di fossili (potenza, metri 4);

β) discordanza;

e) pozzolane grigio-giallastre stratificate (potenza, metri 4);

f) pozzolane chiare, miste a ceneri chiare non stratificate (potenza, metri 4).

La prima formazione, che qui è appena visibile e che si identifica a causa del cambiamento di colore del terreno vegetale, appare invece nettamente non appena oltrepassata la stazione del Cantiere. Infatti al termine di un muro di protezione, costruito per evitare il franamento di materiale sulla strada ferrata, all'altezza dell'ingresso principale degli Stabilimenti Meccanici di Pozzuoli, al disotto degli strati *d* e *b*, che raggiungono in questo punto della Starza la potenza complessiva di metri 12-15 (la massima riscontrata in tutta la formazione), le pozzolane grigio-marrone, frammiste a lapillo scuro, assumono una consistenza di 5-6 metri circa e risultano separate dallo strato delle pozzolane bianco-rosate superiori da una fascia di terreni rimaneggiati. Al limite superiore, al disopra delle pozzolane gialline, ricompare lo strato di pomici rossastre, che sono però molto rare, risultando sostituite quasi totalmente da un lapillo grigio, che più innanzi però scompare. Una piccola grotta, scavata nelle pozzolane grigio-marrone, permette di studiare ancora la seguente successione dall'alto verso il basso:

a') pozzolane grigio-marrone miste a lapillo scuro;

b') alternanza di sabbie grigie e ceneri (probabilmente materiali di trasporto) della potenza di m. 1.20;

c') pozzolane di colore marrone, quasi compatte (potenza dello strato affiorante, m. 0.50).

Tutti questi strati, a partire dallo strato *a'* fino allo strato *c'*, sono caratterizzati dalla mancanza assoluta di fossili.

In tutto il restante tratto, che risulta ora compreso tra il ponte in

ferro della ferrovia Cumana e la stazione di Arco Felice, la stratigrafia della Starza non presenta alcuna modificazione circa la distribuzione e la successione dei prodotti.

Su tutto l'arco della sua lunghezza la zona in oggetto si presenta solcata da otto solchi di erosione, che sono più profondi e più ampi nell'ultimo tratto, vale a dire in quello che risulta delimitato tra la stazione del Cantiere e quella di Arco Felice.

Malgrado la profonda erosione effettuata dalle acque superficiali provenienti dalla Montagna Spaccata (della quale la porzione terminale della Starza sta a rappresentare il bacino di displuvio, il che è da mettersi in relazione con la maggiore e più frequente erosione), tale azione non ha per nulla influenzato la disposizione dei prodotti, in quanto è stata evidentemente posteriore, quando cioè questa coltre di prodotti cinereo-piroclastici si era già deposta. I bordi infatti delle valli scavate dalle acque risultano per la stratigrafia perfettamente concordanti, con stratificazione orizzontale (Tav. III, fig. 1).

CAPITOLO II.

Vulcano di Cigliano e zona limitrofa.

Descrizione stratigrafica.

Il vulcano di Cigliano (Tav. IV e Tav. V, fig. 1), che si eleva da un'altezza di 75 metri fino a 212 metri sul livello del mare, risulta delimitato dai seguenti confini: a Sud e ad Ovest dalla strada ferrata statale Napoli-Roma, che lo divide dal cratere di tufo giallo del Gauro, a Nord dal cratere di Fossa Lupara e di Montagna Spaccata e ad Est Nord-Est dalle cinte crateriche di Astroni e Solfatara.

Il cratere, il cui diametro è di circa 500 metri, si presenta con l'orlo dolcemente degradante verso il mare, scendendo dai metri 212 del versante settentrionale fino ai 194 metri di quello meridionale. Per questi due versanti l'orlo del cratere è perfettamente conservato, ma la porzione occidentale, che guarda il Monte Barbaro, presenta una slabbratura nel tratto centrale, in corrispondenza del quale è attraversato da un profondo solco di erosione, che è il maggiore di quelli che si osservano in questo versante. Tra l'orlo del cratere ed il fondo vi è un dislivello di appena una quarantina di metri.

Mentre la forma del cono vulcanico è perfettamente conservata per i versanti settentrionale ed occidentale, non altrettanto si verifica per quello orientale, ove la formazione di una sella tra i due crateri di Cigliano e di Astroni turba la regolarità del cono. E' precisamente in questo tratto

che le acque superficiali hanno inciso numerosi solchi di erosione, attraverso i quali è possibile studiare la successione dei materiali (Tav. V, fig. 2). D'altra parte, abbastanza recentemente, essendosi associata all'azione della natura quella dell'uomo, è stato possibile studiare la stratigrafia del Cigliano grazie alle ormai numerose cave aperte nella zona di Celle per lo sfruttamento delle pozzolane da parte del Cementir, cave che hanno messo in evidenza nuove sezioni che hanno permesso di dedurre e quindi di incastrare l'attività del Cigliano nella cronologia del terzo periodo flegreo recente, che risulta compresa, come vedremo in seguito, tra l'attività del cratere della Solfatara e quella di Astroni.

I tre solchi di erosione che attraversano le pendici del cratere in direzione Nord-Est Sud-Ovest delimitano tre distinte zone, e precisamente la prima, che è compresa tra le pendici settentrionali della Solfatara ed il primo solco, è denominata Sant'Elmo; la seconda, compresa tra i primi due solchi di erosione, è chiamata Celle; la terza, compresa tra il secondo ed il terzo solco di erosione, racchiude le masserie Di Fraia e Sardo.

Stratigrafia della zona di « S. Elmo ».

Scendendo dalla collina di S. Gennaro (Pozzuoli), lungo la Via Domiziana, ed inoltrandosi lungo il sentiero che si diparte dalla proprietà Pisani, tra le quote 108 e 140, a livello di strada, almeno nel primo tratto, affiorano pozzolane avana-rossicce con inclusi di lapillo nero. Questa formazione, che appartiene al cratere di Agnano, è molto caratteristica a causa della colorazione che si riscontra esclusivamente, con quei toni rossastri, nei prodotti di Agnano. A quota superiore le pozzolane avana-rossicce vanno gradatamente scomparendo, sostituite da formazioni sempre più potenti (che al massimo raggiungono i metri 3) di pozzolane grigio-marrone includenti un lapillo nero. Per la posizione di questa valle, che rappresenta la base delle pendici nord-ovest della Solfatara, questi prodotti sono da assegnarsi appunto a questo cratere.

Del resto una tale ipotesi viene avvalorata dalla presenza piuttosto frequente di grandi blocchi trachitici, talvolta arrossati, che, come ho dimostrato nel mio precedente lavoro, appartengono alla lava del Monte Olibano, al disotto della quale si aprì il cratere della Solfatara, che perforando la trachite, la rigettò successivamente sotto forma di blocchi di varie dimensioni, che si trovano perciò frammisti ai prodotti stessi di questo cratere.

All'altezza della quota 108, all'imbocco del sentiero che conduce alla contrada Spiezio, i prodotti di Agnano, malgrado la folta vegetazione, sono ancora riconoscibili ed evidenti, grazie a due piccole grotte scavate dai contadini del luogo allo scopo di ripararsi dalle incursioni aeree. Tali

grotte, situate a quattro metri circa dal livello di strada, hanno un' altezza di circa un metro e mezzo. Penetrandovi, dal piano di base fino alla volta, appaiono tre strati di pomici avana-rossastre, alternati con due strati di pozzolana dello stesso colore. Proseguendo in direzione della Contrada Spiezio ad entrambi i lati del sentiero, i prodotti di Agnano sono sostituiti totalmente dalle pozzolane grigio-marrone della Solfatara.

Vi è da osservare che questo sentiero rispetto al piano delle due piccole grotte si trova a circa cinque metri più in basso; in altri termini, ad una quota inferiore troviamo prodotti posteriori: infatti i prodotti della Solfatara si trovano ad una quota inferiore rispetto a quelli di Agnano. Osservando bene gli strati, si vede che essi inclinano in direzione Est-Ovest, immergendosi verso Ovest: ciò induce a pensare che la superficie corrispondente al terzo periodo antico doveva presentare tale inclinazione.

Della quota 132 fino alla quota 164, lungo tutto il sentiero che attraversa le contrade Russo e Bonito, i prodotti della Solfatara sono sempre presenti, confondendosi al limite superiore con il terreno vegetale; ma proprio all' altezza della quota 164, al di sopra delle pozzolane grigio-marrone che hanno qui una potenza di metri 1,50 circa, compare una fascia di *humus* dello spessore di cm. 15, ed al di sopra ancora, in netta discordanza, poggiano quattro strati di pomici chiare di media grandezza, alternate con pozzolane, anch' esse chiare, di potenza sempre maggiore (potenza massima 4-5 metri), man mano che ci si avvicina alla quota 183 ove raggiungono una potenza di metri 6-7. Questi prodotti sono da ascriversi all' attività di Astroni, e si può dire che sono presenti in tutta la zona flegrea da Napoli fino ad Arco Felice. Tra la masseria Iorio e la Contrada Russo i prodotti della Solfatara non compaiono affatto, essendo completamente sostituiti da quelli di Astroni: tra questi stessi prodotti compare un *humus,* e precisamente tra le pomici chiare e le pozzolane cineree.

In base a queste osservazioni, per quanto riguarda la località S Elmo, si può ricostruire la seguente successione cronologica: Agnano, Solfatara, Astroni.

Stratigrafia della zona di « Celle ».

Partendo dalla località dell' Annunziata (Pozzuoli alto), e lasciando la Domiziana, oltrepassato il sottopassaggio della Ferrovia dello Stato Napoli-Roma, si entra nella zona di « Celle », percorrendo il vecchio tracciato della via Campana. Ai lati dell' antica e nota arteria romana si osservano i numerosi loculi facenti parte dei « colombai » che si incontrano del resto lungo tutto il percorso. Superati gli ultimi colombai, la strada si divide in due rami scavati proprio nelle valli, che, attraversando rispettivamente le masserie Auletta e Bianchi il primo e quelle Di Fraia e Sardo

il secondo, si congiungono alla altezza della proprietà Di Costanzo, confluendo in un unico sentiero che porta al versante Est del Cigliano. Attraversando la prima valle all'altezza della masseria Auletta, compare quasi tutta la serie dei prodotti che caratterizzano questa zona. La sezione presente alla grande cava di Celle ora abbandonata, ha un'altezza di circa 40 metri. Procedendo dal basso verso l'alto abbiamo la seguente successione:

a) sabbie affioranti a qualche metro dal livello stradale, di colore piuttosto scuro, dovuto alla presenza della magnetite. Potenza, m. 0,50;

b) pozzolane giallo-avana non perfettamente stratificate, ricche di scorie nere di varia grandezza riccamente bollose. Potenza, m. 2;

c) pozzolane variegate. Questo strato è costituito prevalentemente da pozzolane che nella parte inferiore sono di colore marrone-gialline, mentre nella parte superiore la colorazione è grigiastra. La caratteristica è che queste pozzolane sono attraversate da diversi straterelli di lapillo. Potenza dello strato, m. 15. E' questa la formazione più potente;

α) humus;

d) pozzolane gialline. E' uno strato costituito esclusivamente da pozzolane perfettamente stratificate costituenti un'unica formazione. Potenza, m. 4;

e) pomici rossastre con pozzolane rossastre interstratificate. Questo livello è caratterizzato dalla presenza di due strati di pomici, intercalate da un sottile straterello di pozzolane rossicce. Al limite superiore sono presenti le pomici rossastre. Potenza, m. 2 — 2,50. Questo livello che è sempre presente in tutte le sezioni e che è sempre facilmente riconoscibile è stato assunto come livello guida;

β) discordanza;

f) pozzolane chiare. E' costituito essenzialmente da una serie di strati di pozzolane chiare che sfumano al limite superiore con il terreno vegetale, che conserva lo stesso colore. Potenza, m. 5.

Pochi metri più innanzi, in un'altra grande sezione venuta alla luce in seguito all'apertura di una nuova cava, appare la stessa serie dalle scorie nere frammiste alla pozzolana fino alle pozzolane chiare superiori. I materiali sono qui rimaneggiati, in quanto fra gli strati, che concordano perfettamente con quelli citati innanzi, compaiono molto spesso intercalate delle sabbiette, indice di trasporto. E' presente lo strato di *humus* tra le pozzolane variegate e quelle gialline, in netta discordanza, fortemente ondulate al limite superiore e sottoposte alle pomici rossastre, a loro volta separate da un *humus* dalle pozzolane e ceneri chiare superiori.

Procedendo sull'allineamento di questa cava, ad una cinquantina di di metri più innanzi, al disotto delle pozzolane con scorie nere, compare

una fascia di *humus* dello spessore di circa 20 centimetri ed al disotto una pozzolana molto fine, di color bianco-rosato, alquanto rimaneggiata

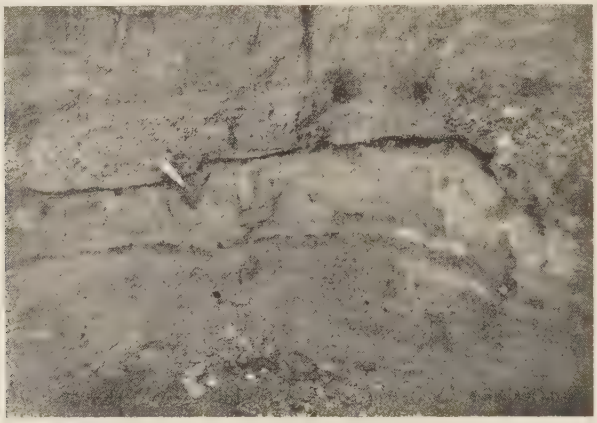


Fig. ". — Fascia di humus soprastante alle pozzolane bianco-rosate del Cigliano, sottoposte a quelle variegate con scorie nere di Astroni (Valle di Ceile - Pozzuoli .

(fig. 2). Questo strato, che affiora per circa mezzo metro dal livello stradale, rappresenta, come vedremo, l'unico prodotto di Cigliano che affiora in questa zona.

Stratigrafia della zona di accesso al cratere di Cigliano.

Percorrendo la strada che conduce all'interno del cratere di Cigliano attraverso la masseria Di Fraia si tagliano le formazioni superiori di Astroni. Al livello del sentiero compare il livello guida delle pomici rossastre separate dalle pozzolane gialline, appena presenti, da una fascia di *humus* violaceo. Avvicinandosi al cratere aumenta lo spessore delle pozzolane gialline e delle pomici e pozzolane rossastre stratificate, che lungo tutto il percorso fino alla masseria Di Costanzo terminano al limite superiore con una fascia di *humus* molto spesso (circa 40 cm.). Al disopra di questo *humus* compare uno strato della potenza variabile da due a tre metri, costituito da pomici chiare di medie dimensioni, perfettamente stratificate dalla zona di accesso fino all'interno stesso del cratere (Fig. 3).

Superiormente pozzolane e ceneri chiare. Nella sezione che si può osservare all'ingresso del cratere (proprio di fronte alla proprietà Di Costanzo) appare la seguente serie dal basso verso l'alto:

a) pozzolane variegate, costituite da piccoli straterelli di pozzolane e lapillo, affioranti per metri 2;

α) discordanza;

b) pozzolane gialline con lapillo e pomici roseo-marrone al limite superiore. Potenza, m. 1.70;

β) humus ben accentuato;

c) pomici rossastre costituenti il livello guida, regolarmente stratificate. Potenza, m. 1.50;

d) pozzolane rossicce con lapillo, stratificate. Questo strato rappresenta la fine delle pomici rossastre, che al limite superiore si arricchiscono di ceneri e lapilli. Potenza, m. 1.50;

γ) humus molto spesso (cm. 30 circa);

e) pomici chiare di medie dimensioni regolarmente stratificate. Potenza, m. 2;

f) pozzolane e ceneri chiare risolventisi nel terreno vegetale. Potenza, m. 1.50.

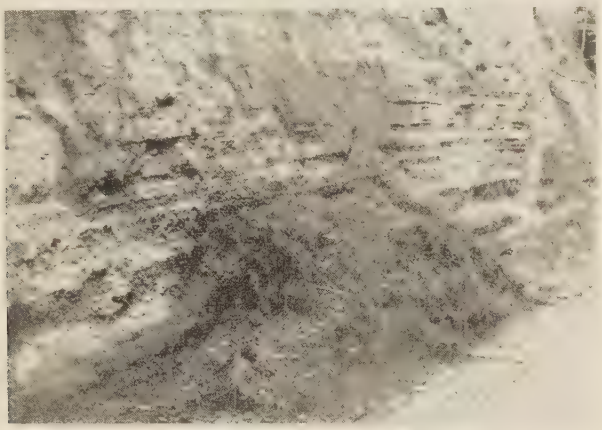


Fig. 3. — Pomici regolarmente stratificate all'ingresso del cratere di Cigliano.

Quando si percorrono gli ultimi cento metri lungo tutto lo stretto sentiero che conduce all'interno del cratere, scompare gran parte degli strati intermedi, ma restano rappresentate sempre le pomici rossastre e quelle chiare, che conservano sempre perfettamente la loro stratificazione fin quasi all'interno del cratere. Se qualche disturbo inoltre è intervenuto nella stratificazione, è stato posteriore ed ha investito tutta la serie degli strati. Lungo tutto il percorso che porta al cratere, infatti, il livello delle pomici chiare si abbassa fino al livello del sentiero. (Tali spostamenti di strati non sono rari a trovarsi nei tufi e nelle pozzolane flegree, come, ad esempio, la serie di piccole faglie (fig. 4) che in maniera molto evidente è possibile osservare nella zona di accesso alla valle di Celle.

Subito dopo questa serie di faglie, la successione stratigrafica conti-

nua con la stessa regolarità. A circa una cinquantina di metri dal cratere, al disotto delle ultime pozzolane compare un altro *humus*, al disotto del quale appare un piccolo strato di pozzolane bianco-rosate, che sono alquanto rimaneggiate. Queste pozzolane, come vedremo, rappresentano i prodotti del Cigliano.

Prima di passare alla stratigrafia del versante settentrionale del Cigliano, completo quella del versante meridionale. In questo versante, però, essendoci una folta vegetazione, che impedisce ogni osservazione, gli unici riferimenti possono essere fatti sulle sezioni che compaiono lungo il sen-

Fig. 4. — Serie di piccole faglie interessanti i tufi e le pozzolane presenti nella zona di accesso alla valle di Celle (Pozzuoli).

tiero che unisce Cigliano con Astroni e che attraverso la Masseria Russo conduce alla località « Lo Sperone ». Allontanandosi da Cigliano in direzione appunto dello Sperone, cresce gradatamente la grandezza delle scorie e delle pomici chiare costituenti il livello superiore, e gli strati, nel mentre diventano sempre più potenti, presentano una caotica disposizione dei prodotti scoriacei. A mezza strada, all'altezza della quota 202, in una delle pochissime sezioni presenti, si osservano superiormente le pomici e le pozzolane chiare, ed inferiormente, separate da una fascia di *humus*, le pozzolane bianco-rosate. Alla proprietà Volpe, vale a dire al confine della località « Conocchia », le pomici superiori assumono il massimo sviluppo e sono gli unici prodotti che affiorano, in una disposizione oltre-

modo caotica, insieme alle pozzolane chiare. In prossimità de « Lo Sperone » si nota una grande quantità di blocchi rigettati, che piuttosto poco frequenti lungo la strada, diventano frequentissimi e di grandi proporzioni quanto più ci si avvicina alla cinta craterica di Astroni.

Stratigrafia del versante settentrionale di Cigliano.

Lungo tutto il tratto di strada che rasenta le pendici orientali del Cigliano, lungo tutto il percorso che porta a Croce Campana, la vegetazione e la mancanza assoluta di sezioni impediscono uno studio stratigrafico. L'unica osservazione che si può fare è che il terreno vegetale conserva la colorazione chiara, vale a dire quella dei prodotti che caratterizzano il cratere di Astroni. Neanche lungo i solchi di erosione, che attraversano longitudinalmente le falde orientali del cono di Cigliano, è possibile osservare la più piccola traccia di stratificazione. Occorre superare la zona di S. Vito, località archeologicamente nota per i suoi ruderi e per il passaggio della condotta dell'antico acquedotto Campano, e spingersi al Rione Cofanara, spostandosi di conseguenza verso il lato settentrionale del cratere, per poter osservare qualche sezione degna di rilievo. La stratificazione, occorre subito dire, non presenta alcun mutamento sostanziale, almeno nel primo tratto del Rione Cofanara: infatti al livello stradale affiorano, quantunque molto rimaneggiate, le pozzolane gialline inferiori di Astroni che poggiano su di una superficie che ha molto risentito dell'erosione. Al disopra v'è uno strato di pomici è pozzolane rossicce, separato dalle pomici e pozzolane chiare superiori sfumanti nel terreno vegetale, da una fascia di *humus*. Nella valle compresa tra il rione « Cofanara » ed il « Verrale di sotto », e precisamente proprio in corrispondenza del punto più alto del cratere, compare un affioramento di circa tre metri di una pozzolana bianco-rosata, separata dai prodotti superiori da uno strato rello di *humus*. Gli strati inclinano debolmente in direzione Nord-Nord-Est, in perfetta armonia con la morfologia del cratere. Queste pozzolane bianco-rosate sono caratterizzate dall'essere suddivise in due porzioni, di cui la inferiore è costituita da un materiale molto fine, mentre la superiore, risulta di un materiale un po' più grossolano e frammisto a sabbiette non stratificate.

Ho prelevato da questa sezione i campioni occorrenti per l'analisi chimica, in quanto le pozzolane bianco-rosate (che, come vedremo tra poco, rappresentano i prodotti di Cigliano) affiorano negli altri punti in modo molto modesto.

Procedendo verso Est ed inoltrandosi nelle valli che conducono alla Masseria Gioia, le pozzolane bianco-rosate sono sostituite completamente dalle pomici e dalle pozzolane chiare. I materiali che si rinvengono non

sono però certamente in posto, in quanto appare evidente il rimaneggiamento a causa dei numerosi straterelli di sabbia, che molto spesso si intercalano con le pozzolane.

Fra il cratere di Cigliano e quello di Montagna Spaccata, situato più a Nord, percorrendo la strada Pozzuoli-Quarto, elevata a pochi metri sul livello stradale, è possibile osservare un'altura isolata, formata da pozzolane grigiastre del terzo periodo. Questa piccola altura, di circa dieci metri di altezza dal livello di strada, fu descritta da Breislak (2), da Scacchi A. (3) e da De Stefani (4), che la ritennero per la sua posizione una parte frammentaria del recinto del cratere di Montagna Spaccata. Ma successivamente il De Lorenzo (5), a causa della sua forma tipicamente isolata, per la sua cima quasi piana e quasi circolare, considerò questa collinetta come un piccolo vulcano isolato, il cui cratere andò successivamente riempendosi con la caduta dei materiali stessi derivanti dal disfacimento del cono. Lo stesso De Lorenzo, dal nome della masseria più vicina, chiamò questo vulcanetto « I Crisci » (Tav. VI, fig. 1).

CAPITOLO III.

Attribuzione dei prodotti.

Una volta messa in evidenza la stratigrafia del Cigliano e delle zone limitrofe, ho rivolto la mia attenzione al problema delle attribuzioni.

Stabilito che l'attività di Cigliano è stata posteriore a quella della Solfatara, in perfetto accordo con quanto già riscontrato da altri studiosi, quali De Lorenzo (6) e Ventriglia (7), occorreva definire quali fossero i prodotti di questo vulcano.

A mio avviso appartengono al Cigliano le sole pozzolane bianco-rosate, che affiorano in modo evidente al versante settentrionale del cratere e ridotte a spessori minimi nella valle di Celle e lungo il sentiero che conduce al cratere.

E' appunto la particolare disposizione degli strati all'ingresso del cratere che mi hanno portato ad escludere come prodotti di Cigliano le spesse formazioni delle pomici chiare, che sono tutte di piccole dimensioni e seguono una regolarissima disposizione nelle stratificazioni. Non può assolutamente giustificarsi sull'orlo di un cratere una simile calma deposizione dei materiali, in quanto in primo luogo, per la selezione gravitativa, le pomici avrebbero dovuto avere una dimensione maggiore, ed in secondo luogo avrebbero dovuto essere disposte in maniera del tutto caotica ed irregolare data la immediata vicinanza del centro eruttivo, cosa che in realtà non si nota affatto. Vi è poi da notare ancora che, procedendo verso la cinta craterica di Astroni, le stesse pomici, invece di conservare

la loro regolare disposizione, diventano sempre più caotiche per assumere poi proporzioni molto notevoli in prossimità di Astroni. Si è quindi portati a concludere che è molto più logico considerare le pomici chiare come prodotti di Astroni anzicchè di Cigliano.

Si potrebbero considerare come appartenenti all' attività di Cigliano le pomici rossastre stratificate e le pozzolane gialline, ma, in tal caso, l'enorme potenza di questi due stessi strati nelle zone circostanti ad Astroni è in evidente contrasto con l' esiguità dello stesso prodotto nell' area del Cigliano. Entrambe le ragioni escludono quindi una tale considerazione. Non restano quindi come sicuramente del Cigliano che le sole pozzolane bianco-rosate, che poggiano direttamente su quelle grigio-marrone miste a lapillo scuro, certamente della Solfatara.

La disposizione delle pozzolane bianco-rosate è in accordo perfettamente con questa attribuzione: infatti tale prodotto compare alla masseria Sardo, al rione Cofanara, ai piedi immediati del Cigliano, lungo la strada che conduce a S. Vito e, soprattutto alla terrazza de «La Starza», che si trova in corrispondenza della base meridionale di Cigliano.

Per quanto specificamente riguarda la Starza, con le attribuzioni così stabilite la successione è la seguente: le pozzolane grigio-marrone, miste a lapillo scuro, sono da attribuirsi al cratere della Solfatara. Tali prodotti, del tutto simili a quelli osservati lungo la Domiziana all' altezza della chiesa di S. Gennaro, si differenziano soltanto per la mancanza di grossi blocchi trachitici, che qui inevitabilmente devono mancare a causa della distanza dal centro eruttivo. I prodotti della Solfatara probabilmente furono deposti in ambiente sub-aereo. Tale ipotesi viene infatti avvalorata dalla assoluta mancanza di fossili in questi prodotti. I materiali soprastanti, caratterizzati dalle pozzolane bianco-rosate finemente suddivise e compatte, sono da attribuirsi a Cigliano. La posizione della terrazza e l' analogia chimica di questi prodotti con quelli prelevati al Cigliano (sui risultati analitici discuterò tra non molto) mi hanno confermato tale attribuzione. Stabilita la provenienza, cerco ora di dedurre, in base ad una serie di osservazioni, in quale ambiente si sedimentarono questi materiali. Secondo quanto ho potuto osservare, si può formulare l'ipotesi che, mentre le prime pozzolane inferiori sedimentarono in ambiente marino molto poco profondo, le successive ebbero al contrario a deporsi in ambiente sub-aereo, in quanto le prime avevano di già colmato il dislivello esistente. Poichè superiormente ai prodotti della Solfatara si trova tutta una zona di transizione, costituita da sabbie miste a pozzolane, ed ancora superiormente al limite dei prodotti inferiori di Cigliano è presente una fascia costituita prevalentemente da terreni rimaneggiati con frammenti di conchiglie di molluschi, bisogna ammettere che questa zona sia stata o proprio di spiaggia o per lo meno di mare poco profondo. In queste condizioni di ambiente si deposero i prodotti iniziali di Cigliano, i quali do-

vettero colmare il bacino costiero preesistente, includendo fossili marini nella loro deposizione. Gli ultimi prodotti furono sub-aerei, ed il limite dovrebbe essere rappresentato da quella fascia di sabbia che si interpone tra i due strati di pozzolane bianco-rosate. L'osservazione può farsi in modo evidente alla sezione presente alla stazione della ferrovia Cumana del Cantiere. Non è detto che l'eruzione del Cigliano abbia avuto necessariamente due fasi, in quanto mentre la prima porzione dei prodotti colmò il bacino poco profondo, gli ultimi si deposero nel bacino già colmato, in ambiente sub-aereo. Infatti i prodotti superiori del Cigliano stesso non contengono fossili, così come non ne contengono quelli di Astroni.

CAPITOLO IV.

Ricerche chimico - petrografiche.

Sui prodotti di Cigliano, limitati esclusivamente alle pozzolane bianco-rosate, ho condotto uno studio analitico, anche allo scopo di poter raffrontare con questi ultimi i prodotti raccolti a « La Starza » ed attribuiti per posizione a Cigliano. I materiali sono stati raccolti al « Rione Cofanara », e precisamente:

1) Pozzolane bianco-rosate di Cigliano, strato inferiore (Analista Sinno);

2) Pozzolane bianco-rosate di Cigliano, strato superiore (Analista Sinno).

Nella seguente tabella vengono riportati i valori analitici rinvenuti, e, successivamente, i valori di Niggli.

	1	2
SiO_2	53.80	53.74
TiO_2	0.24	0.24
ZrO_2	0.04	0.04
Al_2O_3	18.22	18.40
Fe_2O_3	2.66	3.28
FeO	2.64	2.31
MnO	0.14	0.12
MgO	1.90	2.26
CaO	4.20	4.50
BaO	0.06	0.06
K_2O	4.37	4.26
Na_2O	5.60	5.32
Cl	0.16	0.25
SO_3	0.10	0.06
P_2O_5	0.60	0.40
CO_2	0.68	0.74
H_2O^-	0.90	0.96
H_2O^+	3.82	3.14
	100.13	100.08
$O = Cl$	0.04	0.06
	100.09	100.02

Avendo quindi detratto dalla quantità totale di CaO quella spettante a CO_2 per considerare l'ione Ca^{++} sotto forma di $CaCO_3$ ed a P_2O_5 per considerarlo sotto forma di $Ca_3(PO_4)_2$, avendo sottratto agli alcali la quan-

tità di Na_2O spettante a Cl per considerare l'ione Na^+ sotto forma di NaCl, ho calcolato i valori di Niggli che riporto qui accanto:

	si	fm	al	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c + alc.}$	si°
1 —	188	24	38	10	28	0.33	0.41	1.0	0.89
2 —	184	26	37	10	26	0.34	0.43	1.0	0.90

Tra i materiali costituenti la terrazza de « La Starza » ho analogamente condotto, a completamento della stratigrafia, uno studio analitico-petrografico su quei prodotti attribuiti al cratere di Cigliano. I risultati dell'analisi quantitativa ed i relativi valori di Niggli, corrispondenti quasi perfettamente (se si eccettuano piccole variazioni di taluni componenti, variazioni sulle quali discuterò a risultati acquisiti) ai valori trovati per le pozzolane raccolte al Cigliano, hanno confermato giuste le mie attribuzioni.

Sui prodotti della Starza non era stato effettuato fino ad oggi nessuno studio analitico, quantunque numerosi siano stati gli studi geologici e paleontologici condotti da diversi studiosi: in primo luogo De Lorenzo (8), e successivamente Minieri (9), per citare solo i più vicini a noi.

I campioni occorrenti per le analisi sono stati da me raccolti sulla parete sita di fronte alla stazione della ferrovia Cumana del Cantiere, in prossimità di un segnale, ove non potevano esservi dubbi circa la posizione dei prodotti inferiori e superiori, nettamente suddivisi in questo punto da uno strato di sabbie sottili. L'analisi è stata quindi effettuata sulle:

3) Pozzolane bianco-rosate inferiori finemente suddivise, includenti numerosi fossili (Analista Sinno);

4) Pozzolane bianco-rosate superiori, finemente suddivise, non includenti, per quanto abbia cercato, tracce di fossili (Analista Sinno).

I risultati analitici ed i relativi valori di NIGGLI vengono riportati nella tabella seguente.

	3	4
SiO_2	52.40	52.40
TiO_2	0.30	0.30
ZrO_2	0.08	0.06
Al_2O_3	17.82	17.90
Fe_2O_3	4.35	4.13
FeO	2.11	2.31
MnO	0.10	0.10
MgO	1.10	1.30
CaO	5.50	4.90
BaO	0.04	0.04
K_2O	3.22	3.20
Na_2O	5.72	6.02
Cl	0.42	0.35
SO_3	0.48	0.36
P_2O_5	0.40	0.85
CO_2	2.20	1.76
H_2O^-	0.92	0.90
H_2O^+	3.13	3.24
	100.29	100.12
$O = Cl$	0.15	0.09
	100.14	100.03

Avendo quindi detratto dalla quantità totale di CaO quella spettante a CO_2 per considerare l'ione Ca^{++} sotto forma di $CaCO_3$ èd a P_2O_5 per considerarlo sotto forma di $Ca_3(PO_4)_2$, avendo sottratto agli alcali la quantità di Na_2O spettante a Cl per considerare l'ione Na^+ sotto forma di NaCl, ed avendo infine legato ad SO_3 la quantità di CaO spettante per considerare

presente il composto $CaSO_4 . 2H_2O$, ho calcolato i valori di Niggli, che riporto qui accanto:

	si	fm	al	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc.}$	si^0
3 —	192	24	38	10	28	0.26	0.25	1.0	0.90
4 —	191	25	38	9	29	0.34	0.25	1.0	0.90

Dalla interpretazione dei risultati analitici e dei valori di Niggli, si vede che i due prodotti appartengono indiscutibilmente allo stesso cratere. Ma se si osservano con attenzione taluni valori particolari, prescindendo però dalle quantità piuttosto esigue, si possono fare le seguenti osservazioni:

1) Il valore del componente CaO decresce da 5.50 a 4.90 passando dall'analisi 3ª alla 4ª;

2) Il valore del componente CO_2 analogamente decresce dalla analisi 3ª alla 4ª, mentre quello del componente P_2O_5 al contrario aumenta.

Tutto questo sta ad indicare che, mentre le prime pozzolane inferiori sono più ricche di $CaCO_3$, fatto che si ricollega alla presenza dei fossili a scheletro calcareo, le seconde difettano alquanto di questo componente, mentre sono più ricche del componente $Ca_3 (PO_4)_2$, il che comprova la mancanza di fossili e quindi la deposizione di questi prodotti in ambiente subaereo;

3) Il valore del componente SO_3 e del componente Cl diminuisce dalla analisi 3ª alla 4ª, per cui, conseguentemente, diminuiscono i tenori percentuali dei due minerali di origine marina, quali $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ ed NaCl il che potrebbe rappresentare una nuova prova della deposizione dei secondi prodotti del Cigliano in ambiente subaereo.

CONCLUSIONI

La serie dei prodotti rilevati nella zona Pozzuoli-Cigliano-Arco Felice permette di trarre le seguenti conclusioni:

1. – I prodotti di Cigliano sono caratterizzati da pozzolane bianco-rosate, che affiorano soltanto in pochissimi punti nella zona prossima al cratere.

La ragione è da ricercarsi nella attività del cratere di Astroni, che, apertosi posteriormente, con i suoi prodotti ammantò con una coltre chiara le pozzolane del Cigliano, riducendo il dislivello esistente tra la base e l'orlo di questo cratere, modificandone la morfologia e turbando infine la regolarità del cono con la costituzione di una sella nella valle esistente tra Cigliano e gli Astroni. La massima potenza dei prodotti bianco-rosati del Cigliano si riscontra alla terrazza de « La Starza », che topograficamente è situata alla base del versante meridionale del cratere stesso.

2. — L'attività di Cigliano fu posteriore a quella della Solfatara Questa affermazione scaturisce evidente, se si considera la sezione presente alla terrazza de « La Starza » nel tratto tra il Cantiere ed Arco Felice.

3. — L'attività di Cigliano fu anteriore a quella di Astroni. Se ciò non fosse, infatti le pomici chiare superiori, la cui formazione è costantemente presente in tutte la zone del Cigliano ed alla Starza, dovrebbero appartenere a Cigliano, ipotesi questa da escludersi, come abbiamo già visto, essendo contrastante nettamente con le dimensioni e sopratutto con la disposizione perfetta dei materiali nell'interno del cratere, vale a dire in pieno centro eruttivo.

4. — La terrazza de « La Starza », nel tratto compreso tra Pozzuoli ed Arco Felice, risulta costituita quasi essenzialmente dai prodotti di Cigliano. Tale interpretazione, giustificata dalla posizione della terrazza rispetto alla base meridionale del vulcano, ha trovato conferma nella perfetta analogia chimica riscontrata con i prodotti di Cigliano.

5. — Confrontando le pozzolane del Cigliano con quelle del secondo periodo studiate ai Ponti Rossi (Napoli) da SCHERILLO (10), si può notare che, pur essendo anche queste trachitico-alcaline, sono tuttavia leggermente più basiche.

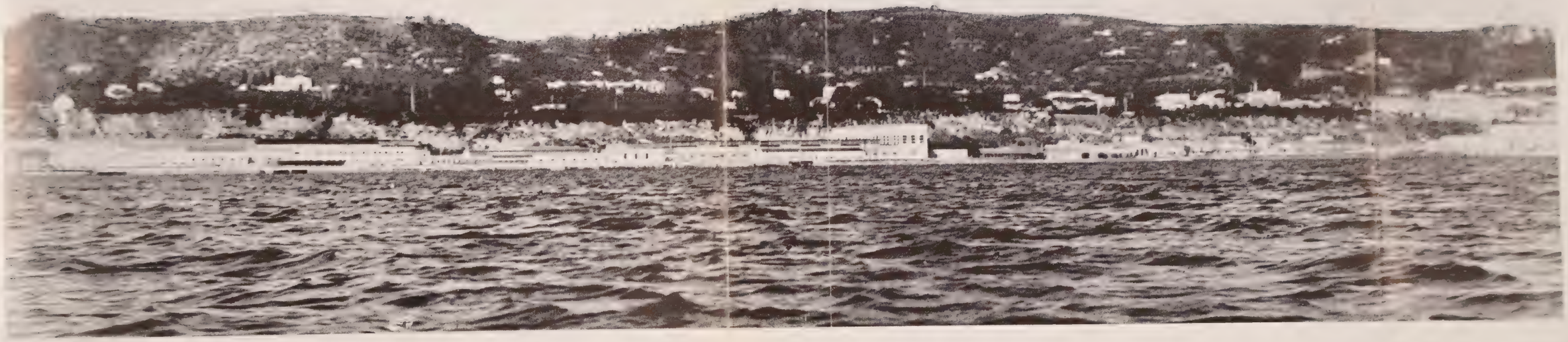
Molto interessante sarebbe vedere se le pozzolane di Cigliano presentano differenze con quelle di Agnano, della Solfatara e di Astroni; ma per

tale confronto manca uno studio analitico, che è ancora in corso. Posso però anticipare, dai primi dati ottenuti dalle analisi in corso, che non pare vi sia una sensibile differenza tra questi prodotti del terzo periodo.

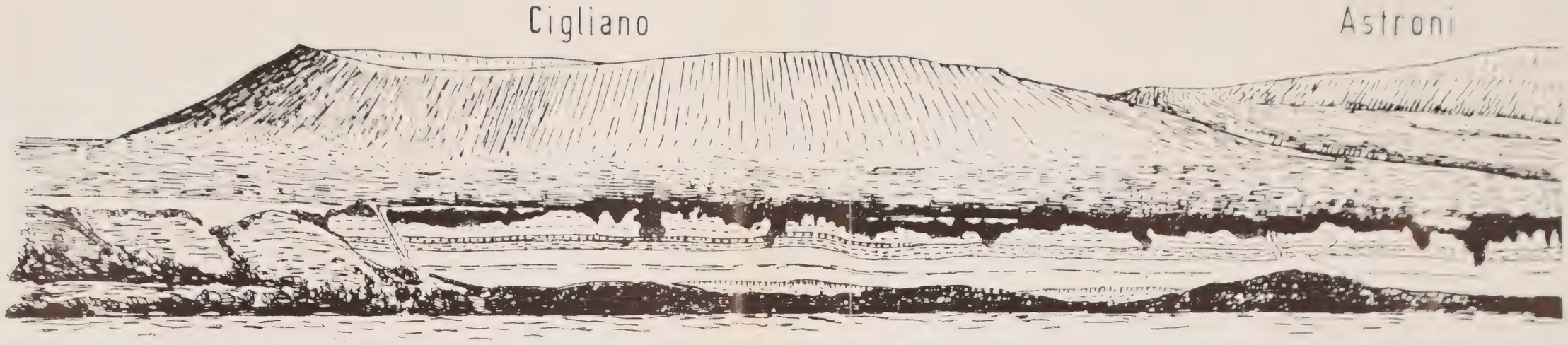
Per concludere, in seguito alla stratigrafia studiata nelle varie sezioni presenti nella zona Pozzuoli-Cigliano-Arco Felice, si può tracciare la seguente successione stratigrafica dal basso verso l'alto e conseguentemente la seguente cronologia:

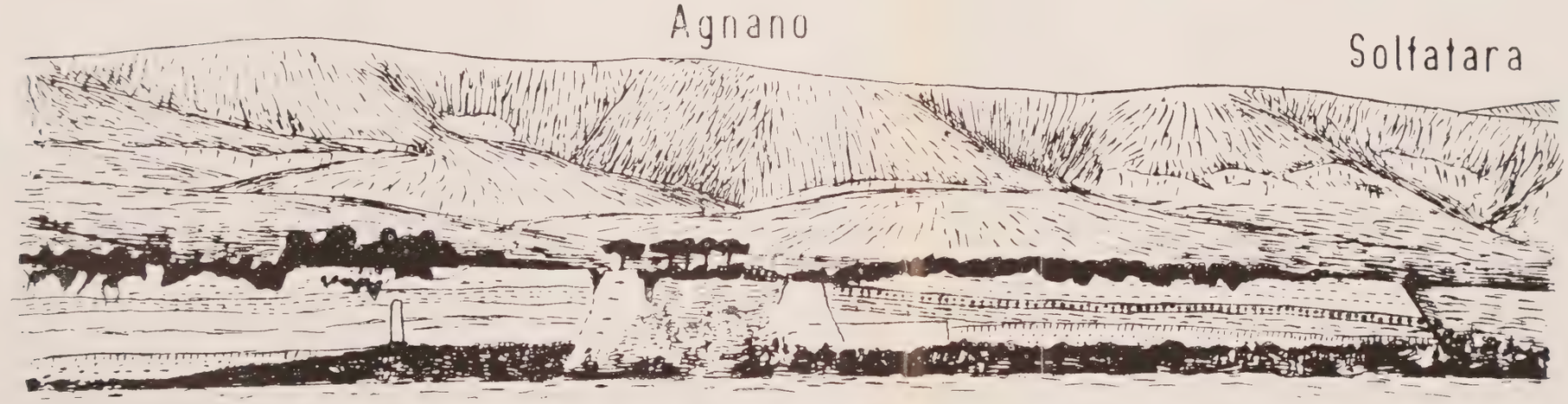
Pozzolane chiare	
Pomici chiare	
humus	
Pozzolane rossicce con lapillo	
Pomici rossastre	*ASTRONI*
humus	
Pozzolane gialline	
Discordanza	
Pozzolane variegate	
Pozzolane variegate inferiori con scorie	
humus	
Pozzolane bianco rosate superiori	*CIGLIANO*
Sabbie	
Pozzolane bianco rosate inferiori	
Discordanza	
Pozzolane grigio marrone con lapillo scuro	*SOLFATARA*
Pozzolane marrone compatte	
Pozzolane rossastre con lapillo scuro	*AGNANO*
Pomici rossastre	

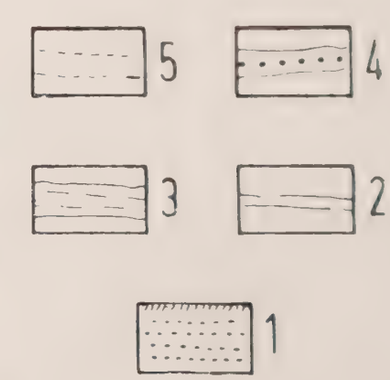
Istituto di Mineralogia della Università di Napoli. Novembre, 1956.



La terrazza de « La Starza », vista dalla spiaggia di Lucrino. A sinistra il cono di Cigliano.







Panorama geologico della terrazza de « La Starza ».

1. - Prodotti della Solfatara. — 2. - Prodotti di Cigliano. — 3. - Pozzolane gialline (Astroni).

4. . Pomici rossastre (Astroni). — 5. - Pomici e pozzolane chiare (Astroni).

Fig. 1. — La « Starza » alle spalle dello Stabilimento Ansaldo. La grande fascia intermedia è costituita dalle pozzolane di Cigliano.

Fig. 2. — La « Starza » alle spalle della Stazione « Cantiere ». Pozzolane di Cigliano

Il cono di Cigliano, visto dal Gauro. Alle spalle Astroni.

Il cono di Cigliano, visto dal Gauro. Alle spalle Astroni.

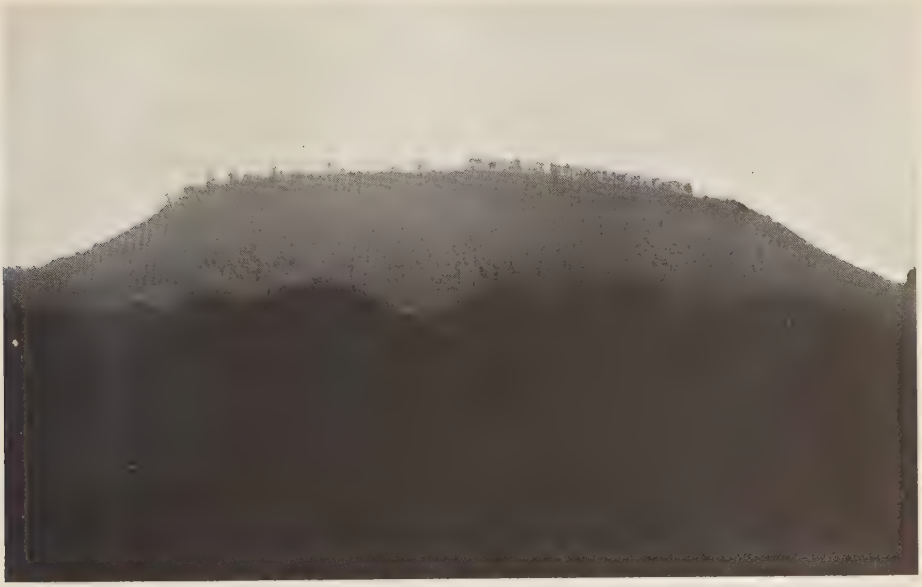


Fig. 1. - Cono di Cigliano, visto da Nord-Est.

Fig. 2. — Solchi di erosione tra Cigliano ed Astroni (Versante meridionale).

Fig. 1. — Collina de «I Crisci», vista dal Gauro.

Fig. 2. — Cigliano (a destra) e Monte Gauro (a sinistra).

1000 m 500m 0 1km

SCALA

C. Calco

Terrule di sotto

Colonnara

Vito

Cigliano

Mass. Gioia

Masseria Russo

Mass. Greco

Mass. Bianchi

Mass. Di Fraia

Mass. Auletta

Mass. Parietta

C. Russo

Mass. Iorio

C. Spiezio

C. Pisano

C. Vassallo

Artico

Anfit.

Serapide

Porto

Pozzuoli

Antico Acquedotto

Monte Nuovo

Lago di Lucrino

Lago di Averno

Lago di Fusaro

Lago di Miseno

Stazione Arco Felice

C. Manzi

Arruinz

Varcelli

Selle

Monte Elmo

Lodpetone

C. Vettori

C. Bondo

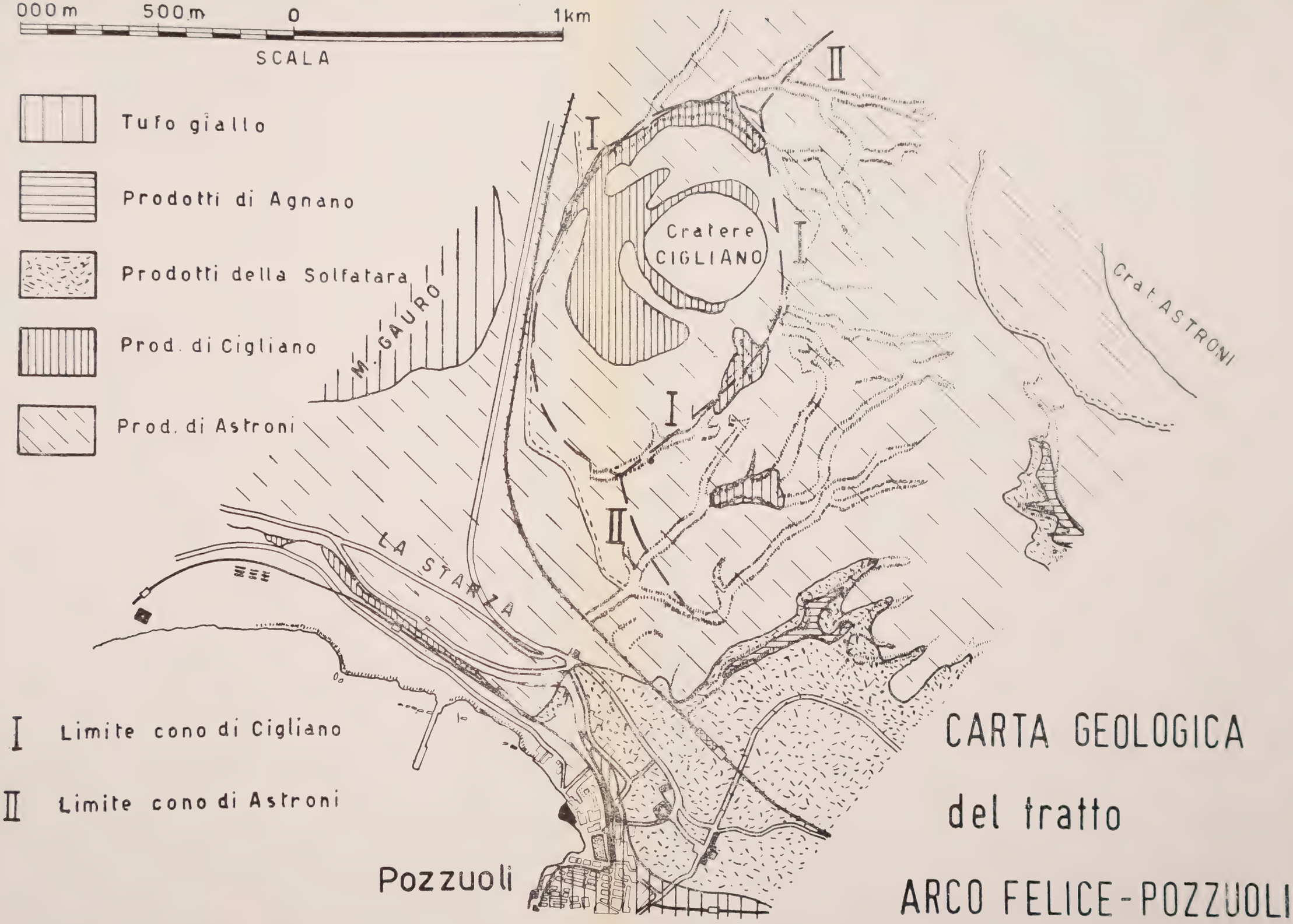
C. Tavo

Traversa

CARTA TOPOGRAFICA

del tratto

ARCO FELICE-POZZUOLI



CARTA GEOLOGICA del tratto ARCO FELICE-POZZUOLI

BIBLIOGRAFIA

1) Sinno R. *Studio geologico e petrografico della zona Monte Olibano-Pozzuoli.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Serie 4ª, Vol. XXII. Napoli, 1955.

2) Breislak S. *Topografia fisica della Campania.* Firenze, 1798.

3) Scacchi A. *Memorie geologiche sulla Campania.* Napoli, 1849.

4) De Stefani C. *Die Phlegraischen Felder bei Neapel.* Petermanns Mitt., Erganzungshfte, n°. 156, 1907.

5) De Lorenzo G. e Simotomai H. *I crateri del Monte Gauro nei Campi Flegrei.* Atti Acc. Sc. fis. e mat., Serie 2ª, Vol. XVI. Napoli, 1915.

6) De Lorenzo G. e Simotomai H. *Op. cit.*

7) Ventriglia U. *Rilievo geologico dei Campi Flegrei (Zona centrale tra la direttissima Napoli-Roma e la collina dei Camaldoli).* Boll. Soc. Geol. Ital., Vol. LXIX. Roma, 1951.

8) De Lorenzo G. e Simotomai H. *Op. cit.*

9) Minieri V. *La terrazza della Starza nei Campi Flegrei.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Serie 4ª, Vol. XVII. Napoli, 1950.

10) Scherillo A. *Petrografia chimica dei Tufi Flegrei. II. Tufo giallo, mappamonte, pozzolana.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Serie 4ª, Vol. XXII. Napoli, 1955.

Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio biennale accademico per gli anni 1955-56

La Commissione pel Concorso al Premio biennale accademico per gli anni 1955-56, composta dai soci Prof. Umberto Pierantoni, Prof. Mario Salfi, Prof. Mario Galgano, ha preso in esame la memoria presentata dall'unico concorrente, contrassegnata dal motto « *Mens agitat molem* ».

La memoria tratta della morfologia del dermascheletro del capo di un Crostaceo Isopodo, *Anilocra physodes* (L.), con particolare riguardo, oltre che alle appendici di questa regione del corpo, anche dell' esoscheletro e dell' endoscheletro della capsula cefalica. L' autore, dopo aver esaminato la costituzione della capsula cefalica, si sofferma in particolare su una porzione della fronte ripiegata ventralmente, che egli denomina lobo deflesso della fronte, e sulla presenza di due processi dell' epistoma, le ali epistomali; rileva inoltre una caratteristica inconsueta nei Crostacei, la ampia separazione delle antennule e antenne di destra da quelle di sinistra.

Di notevole interesse appare la costituzione dello gnatocefalo, del quale fra l' altro, sono descritti due particolari scleriti, gli scleriti paramandibolari, finora mai riscontrati in altri Crostacei, e che l' Autore considera come appartenenti al segmento mandibolare. A proposito della lamina sternale mediana, viene descritta una particolare condizione morfologica che porta alla costituzione di un paio di profonde invaginazioni sternali, le tasche intermascellari, che si addentrano nell' interno della capsula cefalica. Infine è posto in evidenza come, a differenza di quanto riscontrato in altri Isopodi, lo sternite del 1° pereionite non si fonda con la lamina sternale gnatocefalica, ma ne rimanga largamente separato.

Per quanto riguarda i paragnati, essi appaiono, a differenza della norma, sprovvisti di un apparato scheletrico distinto, i cui residui possono identificarsi con la porzione mediale dei processi anteriori della lamina sternale.

Assai interessanti, perché praticamente ignote nei Crostacei, sono le formazioni endoscheletriche del capo. L' Autore descrive due importanti formazioni endoscheletriche della capsula cefalica e altre dello gnatocefalo: le prime sono rappresentate dagli apodemi tergali, che si originano come due invaginazioni laterali del solco postcraniale, le seconde sono apodemi laminari, che si dipartono dal fondo delle tasche intermascellari.

Dopo un così accurato esame degli scleriti cefalici, l 'Autore passa allo studio delle appendici, soffermandosi soprattutto su quelle postorali.

Il lavoro costituisce il primo studio monografico completo e accurato che sia stato condotto sulla morfologia della regione cefalica di una specie di Crostacei: fino ad oggi, nei lavori monografici, venivano trascurati gli scleriti cefalici e prese in esame quasi unicamente le appendici di questa regione. Il candidato inoltre, nel corso della sua ricerca, stabilisce precise comparazioni con altre specie di Isopodi, sulla struttura del capo dei quali lo Snodgrass ha recentemente fornito alcuni dati.

La Commissione si compiace con l'Autore per il lavoro compiuto, che rappresenta un contributo assai notevole alla conoscenza della morfologia comparata degli Artropodi e unanimemente lo ritiene meritevole dell'assegnazione del premio.

Napoli, 29 novembre 1956.

La Commissione
Umberto Pierantoni
Mario Salfi
Mario Galgano

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 gennaio 1956.

Assistono all' adunanza, presieduta dal presidente Spampinato, i soci ordinari Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, ed i corrispondenti Beretta, Montalenti ed Orrù.

Il Segretario legge il processo verbale della tornata 3 dicembre, che è approvato. Indi comunica le principali deliberazioni adottate dal Consiglio generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti nella seduta del 29 dicembre scorso. Partecipa poscia la Ministeriale 22 dic., relativa all' approvazione della nomina del prof. Carlo Miranda a vice-presidente per l' anno 1956 e del prof. Geremia D' Erasmo a segretario per il triennio 1956-1958. Informa infine che il 15 gennaio avranno luogo in Roma le onoranze al consocio prof. Mauro Picone, che ha lasciato il suo insegnamento di Analisi Matematica per limiti di età. — L'Accademia parteciperà a tale cerimonia con l' intervento diretto del suo presidente Spampinato e con l' invio di un telegramma di cordiale adesione.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato un gruppo di lavori dell' Istituto per le applicazioni del calcolo, offerto dal consocio Picone. Il socio Colamonico offre in omaggio il 12° volume delle Memorie di Geografia economica, che contiene un lavoro del prof. Lucio Gambi, *Geografia delle piante da zucchero in Italia*, e ne discorre. — Il presidente ringrazia i donatori.

La Commissione Galli, Miranda e Tolotti, riferisce sulle note del prof. Vincenzo Franciosi, *Il teorema delle trasformazioni lineari dei cavi di precompressione nel calcolo a rottura*, del dott. Eugenio Bruzzese, *Sul calcolo a rottura di strutture in conglomerato precompresso, per flessione e sforzo assiale coesistenti*, e del dott. Pasquale d' Elia, *Contributo alla determinazione del carico critico della trave a cassone*, proponendone l' accoglimento nel Rendiconto. — Con distinte votazioni l'Accademia approva all' unanimità la stampa dei tre lavori predetti.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Carattere singolare e cuspidale di una curva storta completa.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 febbraio 1956.

Presiede il presidente Spampinato, segretario il socio D' Erasmo. Assistono i soci ordinari Bakunin, De Lorenzo, Nobile, Scherillo ed il corrispondente Covello. Scusa l'assenza il socio Diamare.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 gennaio, che è approvato. Indi partecipa la dolorosa e improvvisa scomparsa, avvenuta

in Napoli il 21 gennaio scorso, del consocio Adriano Galli, ordinario di Scienza delle Costruzioni nella Facoltà di Ingegneria, che alla scienza ed alla tecnica aveva dato il meglio della sua cospicua attività di studioso e di maestro, pubblicando numerosi lavori (di cui parecchi, anche recentissimi, inseriti nel Rendiconto accademico) riguardanti lo studio di particolari strutture, i fondamenti teorici dello studio dei problemi di stabilità dell'equilibrio elastico, varie questioni di dinamica delle costruzioni, il problema delle dighe a semplice curvatura ecc., oltre ad un ampio e apprezzatissimo Trattato di Scienza delle costruzioni; e si era ancor più affermato come attivissimo direttore di un centro di studi, nel quale un numeroso gruppo di valenti ricercatori seguiva con grande passione l'impulso ed il fervore del loro impareggiabile maestro. — Il Segretario aggiunge che l'Accademia non mancò al dovere di esprimere alla Famiglia le sue condoglianze più vive, e che la massima parte dei consoci intervenne alle onoranze funebri del compianto Collega, il quale sarà degnamente commemorato in altra adunanza.

Il Segretario presenta l'Annuario 1956 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, recentemente pubblicato e distribuito ai soci, nonchè la memoria D'Erasmo e Moncharmont Zei, *Il cranio giovanile di Elephas antiquus italicus di Pignataro Interamna nella valle del Liri*, accolta nello scorso mese di novembre per la stampa nel volume in corso degli Atti.

Il socio Scherillo, nella sua qualità di tesoriere, presenta il conto degli introiti e delle spese del decorso anno 1955. — Sono nominati revisori dei conti i soci Salfi e Imbò.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 marzo 1956.

Assistono all'adunanza il presidente Spampinato, il segretario D'Erasmo, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo ed i corrispondenti Beretta e Colucci.

Il Segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 febbraio, che è approvato. Indi si dice sicuro interprete dell'unanime sentimento dei colleghi, rinnovando ai soci Bakunin e Caccioppoli le condoglianze dell'Accademia per il recente lutto familiare che li ha colpiti. Presenta poi il volume del Rendiconto relativo all'anno 1955 (serie IV, vol. XXII), del quale è stata recentemente ultimata la stampa.

L'Accademia stabilisce di accordare il cambio del Rendiconto alla Facoltà di Scienze dell'Università di Kanazawa, in Giappone, che invia i suoi « Science reports ».

Il Socio Colamonico presenta ed offre in omaggio il XIV volume delle Memorie di Geografia economica, comprendente una memoria del prof. Carlo

Della Valle sopra *Le bonifiche di Albarese e di Maccarese.* — Il Presidente ringrazia.

Il Socio Spampinato presenta per il Rendiconto una sua nota dal titolo *Rappresentazione nell' S_{2r+1} complesso di una serie lineare, secata su una curva dell' S_r complesso da un fascio di ipersuperficie, prolungata nel campo biduale.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 aprile 1956.

Assistono all'adunanza il presidente Spampinato, il segretario D'Erasmo, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, Giordani, Nobile, Pierantoni, Scherillo, ed i corrispondenti Beretta, Colucci, Galgano ed Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza precedente, che è approvato. Indi comunica una lettera del Direttore della Biblioteca dell'Accademia delle Scienze di Leningrado e un' altra dell'Accademia delle Scienze di Bucarest, relative ai cambi delle pubblicazioni periodiche. — L'Accademia fissa le rispettive risposte.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato *Le livre du Centenaire de la naissance de Henri Poincaré*, offerto dal Comitato organizzatore di quella celebrazione.

Il Socio Colamonico presenta ed offre in omaggio il XIII volume delle *Memorie di Geografia economica*, che comprende la monografia di Giuseppe Barbieri, *I porti della Toscana e del Lazio*, e ne discorre. — Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia i donatori.

Il socio D' Erasmo presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Vincenzo Minieri, *Sull' alterazione di alcuni inclusi delle « argille scagliose » della provincia di Avellino.* — Il presidente nomina la Commissione costituita dai Soci D' Erasmo, De Lorenzo e Scherillo, con l' incarico di riferire su questo lavoro in una prossima adunanza.

Il segretario presenta, a nome del socio Carnera che scusa l' assenza, una nota del dott Elio Fichera, *Sull' equazione del moto del polo istantaneo di rotazione rispetto al polo medio, in funzione delle coordinate del polo d' inerzia.* — Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Carnera, Nobile ed Imbò.

Il socio corrispondente Beretta presenta pure per il Rendiconto, una nota sua e della prof. Liliana Jannelli, dal titolo: *Influenza del solvente sulla costante di velocità delle reazioni di acetilazione.*

Viene quindi data lettura della relazione dei revisori dei conti sul bilancio consuntivo dell' anno 1955, la quale si chiude con la proposta, unanime, di approvazione. Messa ai voti tale proposta, è approvata all' unanimità, con un plauso al tesoriere Scherillo, che con oculata diligenza cura l' amministrazione dell'Accademia.

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 maggio 1956.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Giordani, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, il socio ordinario non residente Armellini, ed i corrispondenti Beretta, Colucci e Panizzi.

Presiede il presidente Spampinato, segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 7 aprile, che è approvato. Indi comunica: 1) la lettera 17 aprile della redazione degli *Acta Chemica Scandinavica*; 2) Il bando di concorso al *Premio Napoli* 1956 per le scienze, con scadenza 31 luglio 1957, sul tema *Ricerca degli idrocarburi nell'Italia meridionale*; 3) il bando di concorso al premio internazionale delle comunicazioni « Cristoforo Colombo » istituito dal Comune di Genova e riservato per il 1956 alle comunicazioni aeree; 4) la richiesta di cambio delle pubblicazioni accademiche da parte della Biblioteca pubblica dello Stato dell'Accademia delle Scienze dell' Ucraina. — L'Accademia acconsente.

Il socio Miranda presenta ed offre in omaggio, da parte del collega Picone, il volume dal titolo *Scritti matematici offerti a Mauro Picone nel suo LXX compleanno.* — Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

La Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Scherillo e la Commissione Carnera, Nobile e Imbò riferiscono rispettivamente sulla nota del dott. Vincenzo Minieri, *Sull' alterazione di alcuni inclusi delle « argille scagliose» della provincia di Avellino*, e su quella del dott. Elio Fichera, *Sull'equazione del moto del polo istantaneo di rotazione rispetto al polo medio, in funzione delle coordinate del polo d' inerzia*, proponendone l' accoglimento per la stampa sul Rendiconto. — Con due distinte votazioni, l'Accademia accoglie unanime le proposte predette.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sui punti ipercomplessi di una ipersuperficie algebrica ordinaria dell' S_r complesso.*

Il socio Miranda presenta, da parte del socio Zappa, una nota del dott. Donato Greco, *Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottogruppi.* — Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Zappa, Miranda e Spampinato, con l' incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Processo verbale dell' adunanza del dì 16 giugno 1956.

Assistono all' adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, Catalano, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato e il socio ordinario non residente Armellini.

Presiede il presidente Spampinato, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 maggio, che è approvato. Indi comunica la lettera 7 giugno dell' Ente Nazionale per la Cellulosa e la Carta, la quale partecipa l' avvenuta concessione di un contributo di L. 230.000 per la stampa del Rendiconto accademico sui fondi destinati alle riviste di elevato valore culturale.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati il vol. VIII (1955) della nuova serie del *Bollettino dell' Orto Botanico dell' Università di Napoli* (*Delpinoa*), offerto dal socio Catalano, e il volume VII (1955) dell'*Annuario dell' Istituto e Museo di Zoologia dell' Università di Napoli*, offerto dal socio Salfi. — Il socio Colamonico presenta e offre all'Accademia due sue recenti pubblicazioni: *La geografia nella scuola secondaria* e *Compendio di storia della geografia e delle esplorazioni geografiche*. — Il presidente ringrazia, a nome dell'Accademia, tutti i donatori.

La Commissione Zappa, Miranda e Spampinato riferisce sulla nota del dott. Donato Greco, *Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottogruppi*, concludendo con l' unanime proposta d' inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia approva.

Il socio Miranda presenta, per il Rendiconto, due note: una del dott. Donato Greco, dal titolo *Un' osservazione sul problema di Dirichlet*; l'altra del dott. Tullio Renzulli, sopra *Il problema dell' asta caricata di punta in campo elasto-plastico*. — Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Miranda, Spampinato e Nobile, con l' incarico di riferire su entrambi i lavori in una prossima adunanza.

Constatata la validità dell' adunanza a norma dell' art. 11 dello Statuto sociale, si passa quindi, secondo l' ordine del giorno, alla elezione dei soci per i posti attualmente vacanti.

Il segretario comunica che nelle adunanze di sezione del 5 maggio e del 16 giugno quella di Scienze Matematiche decise di presentare all' approvazione della Classe un candidato per la nomina a uno dei due posti vacanti di socio nazionale ordinario residente, e un candidato per la nomina al posto vacante di socio corrispondente.

Il socio Spampinato legge la relazione sui requisiti scientifici del socio corrispondente prof. Alfredo Franchetta, ordinario di Geometria analitica e descrittiva nell' Università di Napoli, proposto a voti unanimi dalla Sezione per la nomina a socio ordinario residente. Quindi il presidente chiede ai soci ordinari presenti all' adunanza se abbiano da proporre altri nomi. Non essendo state fatte altre proposte, il candidato è ammesso a votazione a scrutinio segreto, ottenendo quattordici voti favorevoli su quindici soci ordinari votanti.

Il presidente proclama quindi eletto socio ordinario residente nella Sezione di Scienze Matematiche il prof. Alfredo Franchetta, avvertendo che, a

norma dell'art. 14 dello Statuto, l'elezione sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Successivamente il socio Caccioppoli legge il parere motivato sui requisiti scientifici del prof. Federico Cafiero, straordinario di Analisi matematica nell' Università di Catania, proposto a voti unanimi dalla stessa Sezione per la nomina a socio corrispondente. Non avendo alcuno dei presenti chiesto, su domanda del presidente, di integrare la lista con altri nomi, il candidato è ammesso alla votazione per scrutinio segreto. La votazione ha dato quindici voti favorevoli sopra quindici soci ordinari presenti e votanti. Il presidente proclama pertanto eletto il prof. Federico Cafiero socio corrispondente nella sezione di Scienze Matematiche.

Si autorizza il segretario ad accettare, con le limitazioni in vigore, durante il periodo delle ferie estive, le note dei soci di ogni categoria che saranno eventualmente presentate per la inserzione nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell' adunanza del dì 3 novembre 1956.

Assistono all' adunanza il presidente Spampinato, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo ed il corrispondente Beretta.

Il segretario partecipa con dolore la notizia, pervenutagli con ritardo durante i mesi estivi, della morte del socio straniero Edmund Taylor Whittaker, emerito di matematica nell' Università di Edinburgh ed appartenente alla Sezione di Scienze matematiche dal 16 dic. 1938, scomparso il 24 marzo 1956. Indi comunica:

1) il Decreto Presidenziale 9 agosto 1956, che approva la nomina del Prof. Alfredo Franchetta a socio nazionale ordinario residente nella sezione di Scienze matematiche;

2) le lettere dei professori Alfredo Franchetta e Federico Cafiero, che ringraziano l' Accademia per la rispettiva nomina a socio ordinario residente e a socio corrispondente;

3) l' invito a partecipare al Congresso Internazionale sulle costanti fondamentali della Fisica e al XLII Congresso Nazionale di Fisica, nonchè alle onoranze ad Amedeo Avogadro nel I centenario della morte: manifestazioni svoltesi in Torino dal 6 all' 11 settembre scorso e nelle quali l' Accademia fu rappresentata dal consocio prof. Modesto Panetti;

4) l' invito a partecipare al XXVIII Congresso nazionale di Zoologia, che ebbe luogo a Napoli dal 20 al 25 ottobre, e nel quale l' Accademia fu rappresentata dai soci Pierantoni, Salfi e altri. — L' Accademia prende atto.

Quindi il Segretario annunzia che il dì 31 ottobre è scaduto il concorso

al premio biennale accademico per gli anni 1955-56 e che ad esso ha partecipato un solo concorrente, inviando in tempo utile una memoria manoscritta, corredata da 7 disegni e contraddistinta dal motto *Mens agitat molem*, dal titolo: *Morfologia del dermascheletro e segmentazione del capo di Anilocra physodes* (L.) *(Crustacea, Isopoda)*. — Il Presidente nomina la Commissione costituita dai soci Salfi, Pierantoni e Galgano, con l'incarico di riferire all' Accademia su questo lavoro nella prossima tornata del dicembre.

Fra i nuovi cambi di pubblicazioni richiesti recentemente, il segretario segnala, e l' Accademia approva, i seguenti: a) con l' Istituto Zoologico dell' *Academie Polonaise des Sciences* di Varsavia; b) con la Geological Society di Lvov (URRS); c) con gli Annales Scientifiques de l' Université de Jassy (rep. popol. rumena) e con l' Istituto Politecnico della medesima città; d) con la rivista « Matematikai Lapok » di Budapest.

Il socio Colamonico offre in omaggio ed illustra brevemente all' Accademia i due primi fogli della *Carta della utilizzazione del suolo d' Italia*, recentemente pubblicati, sotto la sua direzione, a cura del Cons. Naz. delle Ricerche e della Direz. Gen. del Catasto, che riguardano la Calabria, nonchè la relativa Memoria illustrativa, dovuta al consocio Milone, ed una sua nota sul medesimo argomento.

Il socio Diamare, presentando all' Accademia due suoi recenti lavori riguardanti la *istofisiologia della secrezione lattea* e le *relazioni tra gonadi ed equivalenti surrenali*, discorre con rilievi storico-critici delle proprie ricerche, compiute in epoche diverse, e di quelle di altri studiosi, che sembrano pressocchè ignorate. — Il Presidente, a nome dei soci, ringrazia i donatori.

Si stabilisce quindi il calendario delle tornate ordinarie dell' anno 1957, che risulta il seguente: Gennaio 5, Febbraio 2, Marzo 2, Aprile 6, Maggio 4, Giugno 1, Novembre 9, Dicembre 7.

La Commissione Miranda, Spampinato e Nobile riferisce sulla nota del dott. Donato Greco dal titolo *Un' osservazione sul problema di Dirichlet* e su quella del dott. Tullio Renzulli sopra *Il problema dell' asta caricata di punta in campo elasto-plastico*, proponendo l' accoglimento di entrambe per la stampa nel Rendiconto. — L' Accademia unanime approva.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Curve algebriche complete autoduali*.

Constatata la validità dell' adunanza, a norma dell' art. 11 dello Statuto, per la votazione a cariche sociali, il presidente invita i soci ordinari a procedere, secondo l' ordine del giorno, alla elezione del vice-presidente per l' anno 1957.

Il Segretario ricorda gli articoli dello Statuto e del Regolamento relativi a tale votazione e distribuisce le schede agli aventi diritto.

Prima di procedere alla votazione, il socio Giordani desidera, per

dichiarazione di voto, esprimere il proprio avviso che a tale carica venga chiamato il collega D' Erasmo, rilevando le benemerenze da lui acquistate nel lungo periodo, ormai più che venticinquennale, nel quale ha ricoperto la carica di segretario, che tuttora detiene.

Poichè a tale opinione si associano anche altri colleghi, il socio D' Erasmo chiede la parola per ringraziare i consoci tutti della nuova prova di stima e di fiducia, che in tal modo gli accordano, e per pregarli di desistere da tale designazione per vari motivi, non soltanto formali (essendo egli tuttora segretario in carica e perciò ineleggibile), ma anche sostanziali (che passa brevemente in rassegna), e di volere invece dare, per evidenti ragioni del grande prestigio e decoro che ne deriverà all' Accademia, i loro suffragi al consocio Francesco Giordani.

La votazione, effettuata a scrutinio segreto, dà il risultato seguente:

Soci ordinari presenti e votanti 13:

Francesco Giordani, voti 12;

Geremia D' Erasmo, voti 1.

Il presidente proclama eletto vice-presidente per l' anno 1957 il socio Francesco Giordani, avvertendo che a norma dell' art. 14 dello Statuto sociale la nomina sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1° dicembre 1956.

Sono presenti il presidente Spampinato, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Imbò, Pierantoni, Salfi, Scherillo ed i corrispondenti Colucci, Galgano ed Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 3 novembre, che è approvato. Indi comunica: 1) la Ministeriale 24 novembre, relativa all'avvenuta approvazione della nomina del prof. Francesco Giordani a vicepresidente dell'Accademia per l' anno 1957; 2) l' invito dell' Istituto di alta matematica e del Rettore dell' Università di Roma a partecipare alla commemorazione di Federico Enriques, fissata per il 1° dicembre, e l'adesione inviata dall'Accademia, che ha incaricato il consocio Picone di rappresentarla a tale cerimonia.

Dà quindi notizia della recente nomina, effettuata dal Consiglio dei Ministri, del prof. Giordani a Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche, e si dice sicuro interprete dell' unanime sentimento dei Colleghi tutti rinnovando ell' eminente consocio i rallegramenti e gli auguri più vivi. — Il socio Giordani ringrazia.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato un gruppo di lavori dell' Istitnto per le applicazioni del calcolo, offerto dal socio Picone.

Il socio Salfi, tanto in nome proprio che dei colleghi Pierantoni e Galgano, dà lettura della relazione della Commissione incaricata di riferire sul lavoro presentato al concorso al premio biennale accademico 1955-56, scaduto il 31 ottobre scorso. Il rapporto conclude con l'unanime parere che l'unico lavoro presentato a detto concorso, contrassegnato dal motto *Mens agitat molem* e avente per titolo *Morfologia del dermascheletro e segmentazione del capo di Anilocra physodes* (L.) *(Crustacea, Isopoda)*, sia meritevole del premio di L. 50.000. — L'Accademia approva all'unanimità tale proposta, ed il segretario avverte che, a norma del bando, la busta suggellata contenente il nome dell'autore sarà aperta nell'adunanza plenaria del gennaio 1957 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti.

Quindi l'Accademia stabilisce di bandire, con le norme consuete e con scadenza al 31 ottobre 1958, il nuovo concorso al premio biennale accademico di L. 50.000 per gli anni 1957-58, sul tema: « Studi e ricerche sulla cinetica chimica ».

Il socio Scherillo presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Renato Sinno dal titolo: *Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli — Cigliano — Arco Felice.* — Il Presidente incarica la Commissione costituita da soci Scherillo, De Lorenzo e D'Erasmo di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio Spampinato presenta, per il medesimo periodico, una sua nota *Sulle curve osculatrici di un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica.*

Il Segretario presenta, a nome del socio Malquori, che scusa l'assenza, una nota del prof. Riccardo Sersale dal titolo *Fasi ed habitus cristallino degli alluminati di calcio idrati.* Il presidente nomina la Commissione composta da soci Malquori, D'Erasmo e Scherillo perchè riferisca su tale lavoro in una prossima tornata.

INDICE

G. D'Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1955. . . . . pag. 3

N. Spampinato — Carattere singolare e cuspidale di una curva storta completa . . . . . » 10

N. Spampinato — Rappresentazione nell'$S_{2\,r+1}$ complesso di una serie lineare, secata su una curva dell'S_r complesso da un fascio di ipersuperficie prolungata nel campo biduale . . . . . » 17

E. Fichera — Sull'equazione del moto del polo istantaneo di rotazione rispetto al polo medio, in funzione delle coordinate del polo d'inerzia . . . » 33

D. Greco — Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottogruppi . . » 49

N. Spampinato — Sui punti ipercomplessi di una ipersuperficie algebrica ordinaria dell'S_r complesso . . . . . » 60

D. Greco — Un'osservazione sul problema di Dirichlet . . . . . » 73

V. Minieri — Sull'alterazione di alcuni inclusi delle « argille scagliose » della provincia di Avellino (*con due tavole*) . . . . . » 81

T. Renzulli — Il problema dell'asta carica di punta in campo elasto-plastico. » 90

N. Spampinato — Curve algebriche complete autoduali . . . . . » 109

N. Spampinato — Sulle curve osculatrici di un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica . . . . . » 118

R. Sersale — Fasi ed habitus cristallino degli alluminati di calcio idrati (*con tre tavole*) . . . . . » 125

R. Sinno — Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli-Cigliano-Arco Felice (*con otto tavole*) . . . . . » 137

Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio biennale accademico per gli anni 1955-1956 . . . . . » 158

Processi verbali delle tornate accademiche dell'anno 1956 . . . . . » 161

Indice . . . . . » 171

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. Pierantoni

(Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 10186 del dì 14 agosto 1954)

Finito di stampare il 6 febbraio 1957